Бюро Квантум

ISSN 0130-2221

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

НОЯБРЬ/ДЕКАБРЬ 1993 №11/12

Высокое возрождение. Художники Высокого Возрождения, естественно, продолжали изучать законы научной, или прямой перспективы. Но они и продолжали ее нарушать во имя высшей правды — художественной. Ведь персонажи Леонардо да Винчи, Рафаэля, Тициана и других мастеров этого периода, как справедливо отмечали исследователи уже в XX веке, — это «носители высшего бытия».

Возьмем самый хрестоматийный пример — фреску «Афинская школа», которую Рафаэль выполнил по заказу папы Юлия II для одной из парадных комнат Ватиканского дворца в 1509—1511 гг. Перед художником стояла задача — изобразить наиболее известных древнегреческих философов в архитектурном пространстве, которое, с одной стороны, должно было раздвинуть стены реальной комнаты, где эта фреска написана, а с другой — так, чтобы в самой композиции люди не были бы затеряны среди величественных сводов, напоминающих собор святого Петра в Риме. Собор в это время начал строить его друг Браманте. С первой задачей Рафаэль справился быстро — оставил открытым пространство первого плана. Вторая была сложнее. При натуралистической прямой перспективе фигуры бы затерялись и кроме того одна засланяла бы другую, а при несоразмерно больших фигурах померкла бы прекрасная архитектура. А ведь у Рафаэля величественно и то, и другое. И даже арки вокруг главных героев, находящихся в центре — Платона и Аристотеля, кажутся многим своего рода нимбом, ореолом. Остальные герои удивительно гармонично чувствуют себя, располагаясь непринужденно, но композиционно продуманно.

Дотошные математики уже давно вычислили, что Рафаэль совместил здесь две различные точки зрения, два горизонта. Сверху он изображает пол и людей, а снизу — всю архитектуру. При этом точка схода верхней части находится в правой руке Аристотеля, которой он указывает на землю. Фигуры же вокруг нисколько не уменьшаются, а крайняя левая даже увеличена. Линии же пола, идущие к горизонту, замаскированы гирляндой из развевающихся фигур.

Таким образом, при высоте колонн немногим больше удвоенного роста фигур Рафаэль смог передать, казалось бы, единичное явление в величественных и универсально обобщенных формах.

Галина Загянская

Научно-популярный

физико-математический журнал

Выходит с января 1970 года

КВАНТ

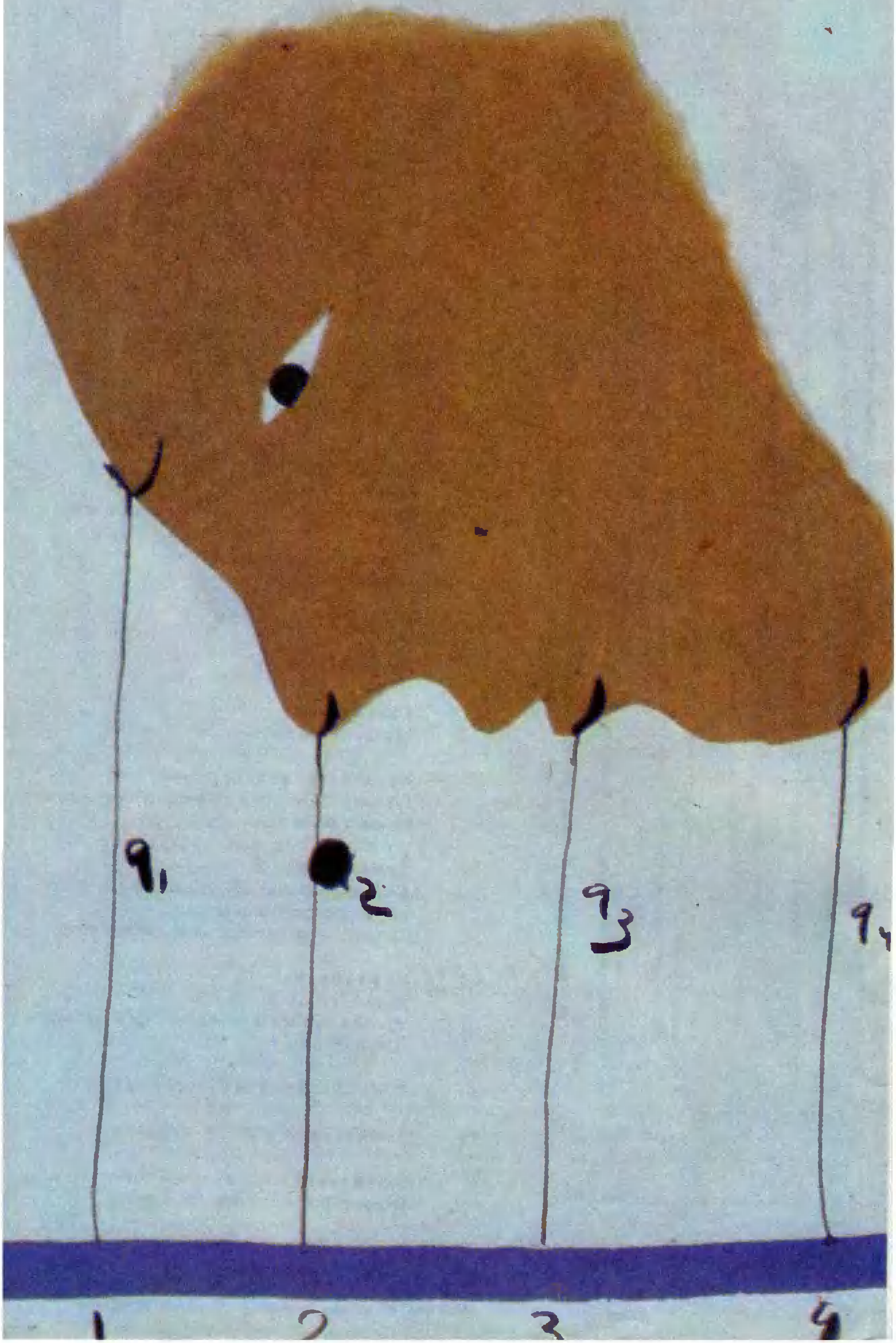
Учредители :

Президиум РАН, «Бюро Квантум»,

Издатель — НПП «Бюро Квантум» РАН

СОДЕРЖАНИЕ

На I стр. обложки — графика Дмитрия Крымова


q1
q2
q3
q4
1
2
3
4

О логарифмической вогнутости

АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВ

Анри Пуанкаре писал о математике: «Люди, посвященные в ее тайны, вкушают наслаждения, подобные тем, которые дает нам живопись и музыка. Они восторгаются изящной гармонией чисел и форм; они приходят в восхищение, когда какое-нибудь новое открытие раскрывает перед ними неожиданные перспективы.»

И вы можете это испытать. Несколько тем, традиционно относимых к разряду красивых, — выпуклость, комбинаторика, производящие функции и симметрия, — довольно необычно и, по-моему, интересно переплетаются в разговоре о логарифмической вогнутости. Итак, начнем...

Вогнутые последовательности

Определение 1. *Конечная последовательность* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *называется вогнутой, если каждый ее член, кроме первого и последнего, не меньше среднего арифметического двух соседних с ним членов, т.е. если*

$$\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} \le a_k \text{ при } 1 \le k \le n-1.$$

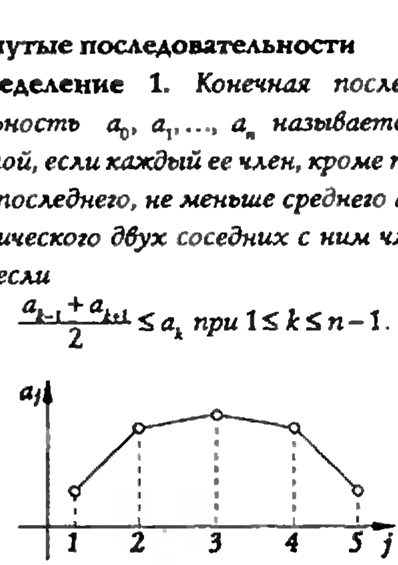


Рисунок 1. График вогнутой последовательности.

Аналогично определяется и *бесконечная* вогнутая последовательность. Если же для пос ,,овательности (a_m), $m = 0,1,2,...,n$ выполняется условие $\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} \geq a_k$ при $1 \leq k \leq n-1$, то она называется *выпуклой*.

Простейшим примером вогнутой последовательности является всякая арифметическая прогрессия $a_n = a + nd$, $n \geq 0$.

Графики вогнутых последовательностей как бы выгибаются вверх (см. рисунок 1).

Выберем теперь какие-нибудь два номера $j \geq k$ и сложим все неравенства

$$a_m \geq \frac{a_{m-1}+a_{m+1}}{2}$$

при $j \geq m \geq k$. После преобразований придем к неравенству

$$a_j + a_k \geq a_{j+1} + a_{k-1}. \qquad (*)$$

Упражнение. Какие из последовательностей $a_n = \sqrt{n}$, $a_n = n^2$, $a_n = \log_2 n$, $a_n = \frac{n}{n+1}$, $a_n = \frac{n+1}{n}$ вогнутые, а какие — выпуклые?

Логарифмическая вогнутость

Одно из достоинств математики — безопасность любого эксперимента (в случае неудачи ни взрывов, ни ударов током не будет). Поэтому удовлетворим естественное желание заменить среднее арифметическое в определении вогнутой последовательности средним геометрическим и посмотрим, что получится.

Определение 2. *Конечная последовательность положительных чисел, такая что каждый ее член, кроме первого и последнего, не меньше среднего геометрического пары своих соседей, называется логарифмически вогнутой.*

Каждому, кто знает, что логарифмы были придуманы для замены умножения сложением, должно быть очевидно, что последовательность (a_n) тогда и только тогда логарифмически вогнута, когда вогнута последовательность $(\log_b a_n)$, где $b>1$ — произвольно выбранное основание. Это соображение, во-первых, объясняет название; во-вторых, показывает, как переносить неравенства, справедливые для вогнутых последовательностей, на логарифмически вогнутые.

Например, из неравенства $(*)$ следует, что для произвольных некрайних индексов $j \geq k$ логарифмически вогнутой последовательности (a_n) выполняется неравенство $a_j a_k \geq a_{j+1} a_{k-1}$.

Чтобы не повторять каждый раз слова «кроме первого и последнего», «кроме крайних», добавим с обоих концов последовательности нулевые элементы (возможно, с «неправильными» индексами: скажем, a_{-1} или a_4, a_5 для трехчленной последовательности a_0, a_1, a_2 равны нулю), и в дальнейшем будем считать, что последовательность начинается и кончается нулевыми членами, если не оговорено иное. При этом последовательности (a_n) и (b_n), такие что $a_n = b_n$ для каждого индекса n, естественно считать одинаковыми (фактически же они могут отличаться различным количеством нулей в начале или в конце).

С учетом этого соглашения последовательность неотрицательных чисел (a_n) тогда и только тогда логарифмически вогнута, когда для любой пары индексов $j \geq k$ выполняется неравенство

$$a_j a_k - a_{j+1} a_{k-1} \geq 0.$$

Действительно, то, что из логарифмической вогнутости вытекают эти неравенства при некрайних j и k, мы доказали; случаи крайних или «неправильных» j и k легко проверяются. Обратно, при $j = k$ имеем $a_j^2 \geq a_{j+1} a_{j-1}$, следовательно, $a_j \geq \sqrt{a_{j+1} a_{j-1}}$. Осталось проверить, что если указанные неравенства выполнены, то в последовательности (a_n) нет «внутренних» нулей. Предположим, что это не так и «внутри» последовательности есть некоторая серия нулей, по краям которой — не нули. Обозначим через j номер последнего нуля этой серии, а через k — номер первого нуля; тогда получается, что $-a_{j+1} a_{k-1} \geq 0$. Пришли к противоречию, завершающему доказательство.

Комбинаторные числа

Мы уже достаточно долго рассуждаем о логарифмически вогнутых последовательностях. Но встречаются ли они «в природе»? Другими словами, естественное ли это явление, распространенное, или же, напротив, исключительное, редкое? Многие интересные последовательности возникают в комбинаторных задачах. Рассмотрим здесь несколько примеров, основанных на более или менее вероятных ситуациях.

Допустим, что в вашем классе n учеников и m из них нужно выбрать для поездки в летнюю школу в США. Обозначим через $\binom{n}{m}$ количество способов выбрать m человек из n данных.

Определение 3. *Число $\binom{n}{m}$ называется числом сочетаний из n элементов по m.* Очень часто это число обозначается также C_n^m (читается «цэ из эн по эм»).

Установим некоторые свойства этих чисел.

Все возможные группы по m человек делятся на два важных типа: с вами или без вас. Число групп первого типа, очевидно, равно $\binom{n-1}{m-1}$ — ведь нужно к вам добавить еще $m-1$ человек из остальных $n-1$ учеников вашего класса. Не менее очевидно, что число групп второго типа равно $\binom{n-1}{m}$ — нужно из остальных $n-1$ человек составить всю группу. Поэтому

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m} \qquad (**)$$

при $n \geq 1$ — ведь мы предполагали, что по меньшей мере 1 человек — вы — есть в классе. Будем, как и раньше, считать, что все «неправильные» члены равны 0, в частности, $\binom{n}{-1}=0$. Кроме того, $\binom{n}{0}=1$ — есть только один способ никого не посылать: никого не посылать. Также $\binom{n}{m}=0$ при $m>n$ — выбрать больше человек, чем имеется в классе, нельзя. Учитывая все это, легко составить таблицу 1 (она называется треугольником Паскаля).

Соотношения типа равенства (**) называются *рекуррентными* (возвратными)

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Таблица 1

— они задают правило для вычисления следующих членов последовательности, если известны предыдущие. В частности, каждая строка таблицы 1 получается из предыдущей, в силу (**), очень просто: на первом месте пишется 1, затем под каждым числом предыдущей строки пишется сумма этого числа и числа, ему предшествующего. И, наконец, строка завершается единицей.

Теперь подумаем, как выбрать тех, кто поедет в Штаты. Например, можно поступать так: разбить всех учеников на m непустых групп, рассадить эти группы за n круглых столов с волчками (вроде стола для игры «Что? Где? Когда?») и закрутить волчки. Поедут те, на кого укажут стрелки.

Пусть $s(n, m)$ — количество способов разбить n человек на m непустых групп и указать в каждой группе порядок их расположения за круглым столом [1].

Наиболее удачных вариантов, когда в одной из групп — вы и только вы (тем самым поездка вам гарантирована), как нетрудно видеть, $s(n-1, m-1)$ — ведь нужно еще остальных $n-1$ учеников разде-

[1] *Числа $(-1)^{n-m} s(n,m)$ называются числами Стирлинга первого рода.*

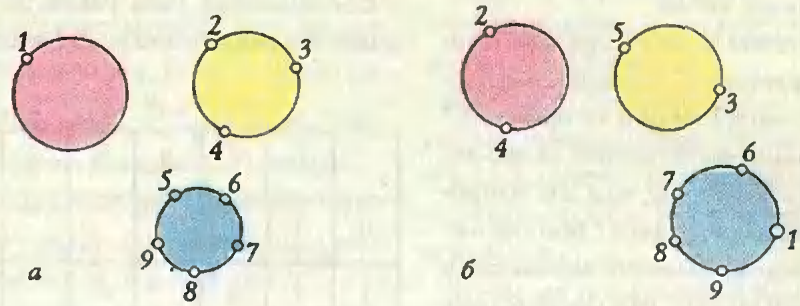


Рисунок 2. К определению $s_{д}(u,v)$.

лить на $m-1$ групп (с указанием в каждой группе, кто за кем следует по кругу). Других вариантов имеется $(n-1)s(n-1, m)$, поскольку каждое такое расположение можно получить следующим способом: разбить остальных учеников на m групп, рассадить их за столами, а затем указать вам, за кем вы следуете, т.е. посадить вас на какое-либо место за один из столов. На рисунке 2,*а* вы в гордом одиночестве сидите за первым столом. На рисунке 2,*б* 8 человек уже сидят за тремя столами, и вас направляют за третий стол — между 6-м и 9-м учениками.

Итак, доказано равенство

$$s(n,m)=s(n-1,m-1)+(n-1)s(n-1,m)$$

при $n \geq 1$. Будем считать, что $s(0,0)=1$, — это согласуется со значением $s(1,1)=1$. «Неправильные» члены опять удобно считать равными 0. Кроме того,

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0	1				
2	0	1	1			
3	0	2	3	1		
4	0	6	11	6	1	
5	0	24	50	35	10	1

Таблица 2

$s(n,m)=1$ при $m-n \geq 0$. Все это позволяет составить таблицу 2.

Даже гипотетически приятно считать, что вы попали в группу отъезжающих в Америку, не так ли? Ну, а теперь предположим, что вам повезло и вы в Шереметьеве-2 стоите в очереди на таможенный досмотр. Очередь тянется долго, и чтобы занять время, вы подсчитываете число таких случаев в вашей группе, когда менее высокий человек стоит ближе к цели, чем более высокий. Сколькими способами можно построить m человек разного роста в одну шеренгу так, чтобы имелось ровно k таких пар, в которых менее высокий стоит левее более высокого? Обозначим это число $M(m, k)$. (Оно называется числом Мак-Магона.)

Заметим, что если самого высокого из группы послать за мороженым, то в оставшейся группе число пар, в которых менее высокий стоит перед более высоким, уменьшится на $i-1$, где i — номер места в очереди этого «самого высокого». Отсюда следует равенство

$$M(m,k)=M(m-1,k)+M(m-1,k-1)+\ldots$$
$$\ldots+M(m-1,k-m+1)$$

— здесь, как и прежде, $m \geq 1$ и i-е слагаемое отвечает случаю, когда «самый высокий» стоял на i-м месте. Опять договоримся об обращении в 0 «неправильных» членов. Скажем, будем считать, что $M(0,0)=1$. Снова составим таблицу (таблица 3).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											
1	1										
2	1	1									
3	1	2	2	1							
4	1	3	5	6	5	3	1				
5	1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1

Таблица 3

Производящие функции

Во многих случаях удобно бывает последовательности (a_n) сопоставить такую запись:

$$(a_n) \leftrightarrow f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

Это выражение называется *производящей функцией* последовательности (a_n), хотя функцией в обычном понимании и не является. Разумеется, если данная последовательность конечна, то получается обычная функция — многочлен.

Производящие функции последовательностей-строк наших таблиц таковы:

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m = (1+x)^n,$$

$$\sum_{m=0}^{n} s(n,m)x^m = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1),$$

$$\sum_{k=0}^{m} M(m,k)x^k = (1+x)(1+x+x^2)\ldots$$
$$\ldots(1+x+\ldots+x^{m-1}).$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить начальные значения и затем проследить, что происходит при умножении какого-либо многочлена на $(1+x)$, $(x+n-1)$ или $(1+x+\ldots+x^{m-1})$: коэффициенты вычисляются как раз по тем рекуррентным формулам, по которым мы строили таблицы. (Проведите эти рассуждения самостоятельно.)

Лвоки

Будем говорить, что многочлен с логарифмически вогнутой последовательностью коэффициентов — *лвок* (название составлено из начальных букв слов, входящих в определение). Наблюдательные читатели могли заметить, что последовательности-строки таблиц 1 — 3 логарифмически вогнуты, другими словами, их производящие функции — лвоки. Но как это доказать в общем случае, т.е. при всех n?

Заметим, что каждый сомножитель в указанных разложениях на множители, очевидно, лвок. Быть может, произведение лвоков — лвок? Отсюда сразу же следовало бы наше утверждение. Мы увидим, что это действительно так.

Симметрические многочлены

«Для многих особая прелесть этой науки заключается в том, что здесь можно трудиться, не слишком много зная об остальной математике и не будучи, следовательно, вынужденным сочетать друг с другом идеи, относящиеся к различным сферам,» — с некоторой иронией говорил Феликс Клейн[2].

Между тем, симметрия в различных своих ипостасях играет, несомненно, важную роль

[2] *Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Т. I — М.: Наука, 1989. — с. 375.*

в современной математике и вообще в жизни. Сейчас мы увидим, как привлечение малой толики ее приводит к новому освещению фактов, так что результаты, сложно доказываемые другими методами, становятся очевидными.

Сначала —

Определение 4. *Многочлен $f(u, v)$ от двух переменных u и v называется симметрическим, если $f(u,v)=f(v,u)$, т.е. если при перестановке переменных этот многочлен не меняется.*

Ясно, что всякий симметрический многочлен можно, причем единственным способом, записать в виде

$$f(u,v)=\sum_{j\geq k} f_{jk}u_{jk},$$

где f_{jk} — некоторые числа, и

$$u_{jk}=\begin{cases} u^j v^k + u^k v^j & \text{при } j>k, \\ u^j v^k & \text{при } j=k. \end{cases}$$

Конечно, симметрические многочлены не обязательно раскладывать в сумму именно по многочленам u_{jk}. Рассмотрим, например, сумму одночленов

$$s_{jk}=u^j v^k + u^{j-1}v^{k+1} + \ldots + u^k v^j,$$

определенных при $j \geq k$. Не вдаваясь в детали, сообщим, что эти многочлены играют большую роль в теории и приложениях симметрических функций и называются *функциями Шура*. Степени $(j,k),(j-1,k+1),\ldots,(k,j)$ в их определении — это точки с целыми координатами на отрезке, соединяющем точки (j,k) и (k,j) (см. рисунок 3).

Заметим, что

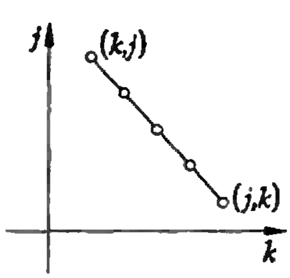


Рисунок 3. К доказательству единственности.

$$u_{jk}=\begin{cases} s_{jk}-s_{j-1,k+1} & \text{при } j>k, \\ s_{jk} & \text{при } j=k. \end{cases}$$

Заменив в разложении многочлена $f(u,v)$ по u_{jk} многочлены u_{jk} этими выражениями, получим разложение

$$f(u,v)=\sum_{j\geq k}\left(f_{jk}-f_{j+1,k+1}\right)s_{jk}$$

(в котором, как всегда, считаем, что $f_{m,-1}=0$).

Заметим также, что от равенства

$$f(u,v)=\sum_{j\geq k} f_{jk}^{s} s_{jk}$$

котором буква s в обозначении f_{jk}^{s} — не степень, а знак того, что это — коэффициент разложения по функциям Шура) мы, заменив функции Шура их разложениями по u_{jk}, получим:

$$f(u,v)=\sum_{j\geq k}\left(f_{jk}^{s}+f_{j+1,k-1}^{s}+\ldots+f_{j+k,0}^{s}\right)u_{jk}.$$

Если от этого разложения перейти указанным выше способом к разложению по s_{jk}, мы вернемся к исходному равенству. Отсюда и из единственности разложения по u_{jk} легко следует единственность разложения симметрических многочленов по функциям Шура.

Присмотримся теперь повнимательнее к равенству

$$f_{jk}^{s}=f_{jk}-f_{j+1,k-1}.$$

Что оно вам напоминает? Загляните в начало статьи — правая часть похожа на левую часть неравенства

$$a_j a_k - a_{j+1}a_{k-1} \geq 0,$$

использованного во втором определении логарифмической вогнутости, не так ли? Точнее, если $f_{jk}=a_j a_k$ для каждой пары индексов $j \geq k$, мы получим как раз то же самое выражение.

Но из многочлена от одной переменной

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

можно получить симметрический многочлен от двух переменных

$$f(u,v) = \sum_{j,k} a_j a_k u^j v^k ,$$

положив

$$f(u,v) = p(u)p(v)$$

(проверьте это на каком-нибудь примере).

Итак, мы обнаружили следующий важный факт: *многочлен с неотрицательными коэффициентами $p(x)$ — лвок тогда и только тогда, когда все коэффициенты*

	U^5V	U^4V^2	U^3V^3	U^2V^4	UV^5
U^3	U^8V	U^7V^2	U^6V^3	U^5V^4	U^4V^5
U^2V	U^7V^2	U^6V^3	U^5V^4	U^4V^5	U^3V^6
UV^2	U^6V^3	U^5V^4	U^4V^5	U^3V^6	U^2V^7
V^3	U^5V^4	U^4V^5	U^3V^6	U^2V^7	UV^8

Рисунок 4. Произведение функций Шура

разложения симметрического многочлена $p(u)p(v)$ по функциям Шура неотрицательны!

Теперь мы сразу же доказали бы, что произведение лвоков — лвок, если бы знали, что произведения симметрических многочленов с неотрицательными коэффициентами разложения по функциям Шура также имеют неотрицательные коэффициенты разложения по функциям Шура. Для доказательства этого достаточно убедиться в том, что каждое произведение функций Шура друг на друга раскладывается по функциям Шура с неотрицательными коэффициентами.

Мы не будем доказывать это утверждение во всей общности, ограничимся лишь подтверждающим примером.

Рассмотрим произведение двух функций Шура, скажем, $s_{5,1}$ и $s_{3,0}$. Расположим одночлены, входящие в эти функции, по краям таблицы (см. *рисунок 4*). В пересечении строк и столбцов таблицы стоят произведения соответствующих одночленов. Заметим теперь, что одночлены, стоящие в таблице в «уголках», показанных цветом на рисунке 4, образуют функции Шура. Итак,

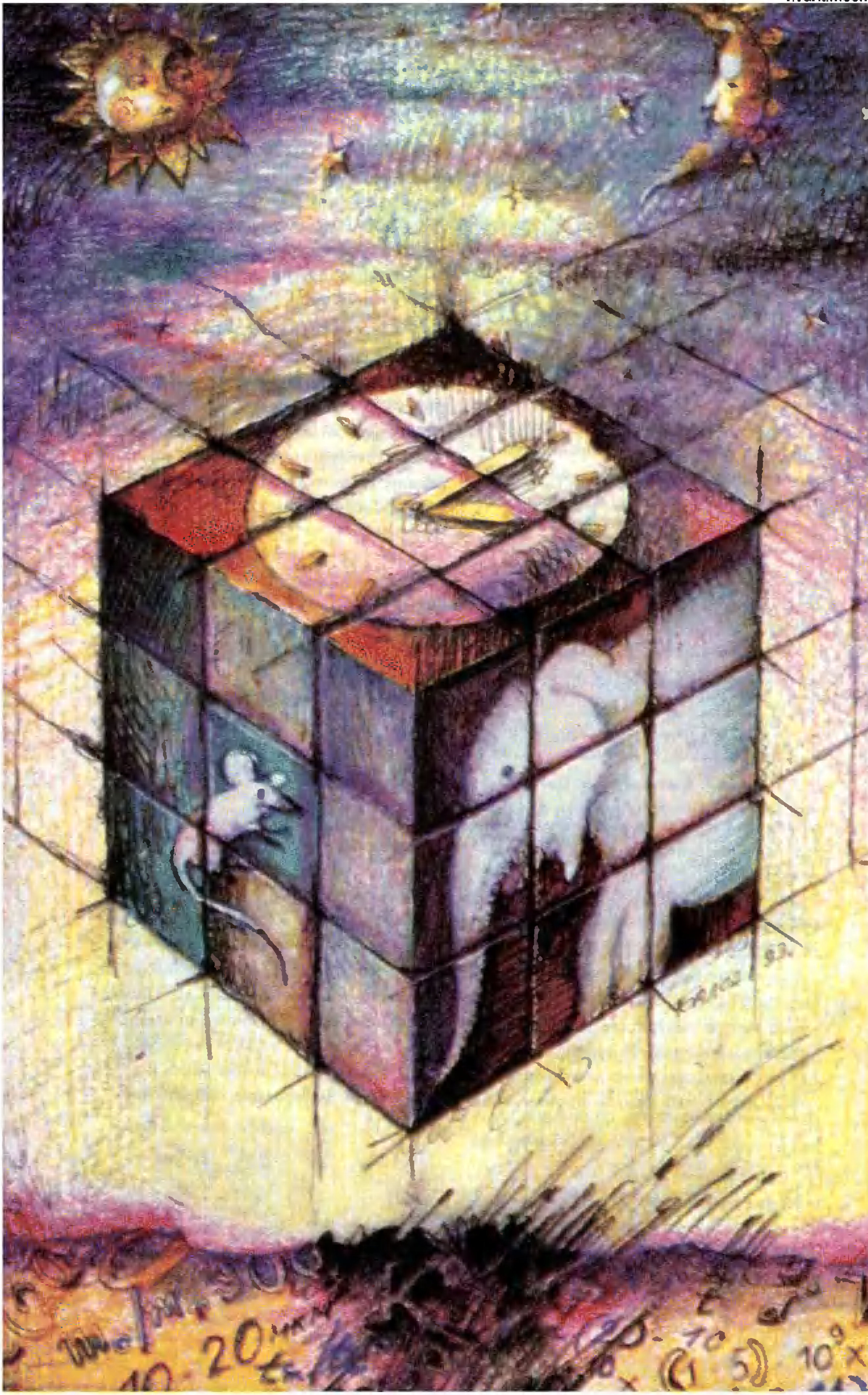
$$s_{5,1} \cdot s_{3,0} = s_{8,1} + s_{7,2} + s_{6,3} + s_{5,4} .$$

Коэффициенты разложения очевидно неотрицательны. Аналогичное рассуждение может быть проведено и для любых функций Шура.

Но это завершает доказательство того, что произведение лвоков является лвоком и, следовательно, последовательности $\binom{n}{m}$, $s(n,m)$, $M(m,n)$ логарифмически выпуклы.

Заключение

Продолжим цитату из Анри Пуанкаре, начатую во вступлении: «Разве в наслаждениях, испытываемых этими людьми, нет эстетического характера, несмотря даже на то, что чувства в этих состояниях не принимают никакого участия? Правда, только немногие избранные призваны к тому, чтобы вполне вкусить эти наслаждения. Но разве это не имеет места и в случае наиболее благородных искусств?»



От мыши до слона

Размер клеток и другие зоологические постоянные

Анатолий Минеев

Земная фауна чрезвычайно разнообразна. Оказывается, однако, что среди параметров, характеризующих живые существа, есть такие, которые очень слабо меняются в широком диапазоне изменения масс животных. Назовем подобные параметры зоологическими постоянными. Их краткий список для млекопитающих «от мыши до слона» приведен в таблице 1.

Уточним сначала, что мы имеем в виду под словом «постоянные» применительно к животному миру. Конечно, в теле животных имеются и существенно более протяженные клетки, например нервные волокна. Однако число их среди остальных клеток пренебрежимо мало. Точно так же температура тела больных животных может подскакивать, а величины относительной массы мышц для представителей одного вида, но с различной физической активностью, различаются. В этом смысле указанные в таблице величины относятся к средним, наиболее многочисленным, представителям каждого вида животных. Другими словами, распределение вероятности появления определенного значения зоологического параметра, как правило, имеет вид кривой с отчетливым максимумом — это и есть характерное значение зоологической переменной. Таким образом, смысл используемых нами зоологических постоянных несколько иной, чем, скажем, физических постоянных (типа скорости света или массы электрона, т.е. вполне точных величин).

Основное внимание в этой статье будет уделено природе указанного размера клеток животных. Остальных мы только коснемся, в их числе одна из наиболее загадочных постоянных — ресурс сердца (миллиард ударов за жизнь для млекопитающих).

«О карманных деньгах не надо думать, — сказал Остап, — они валяются на дороге, и мы их будем подбирать по мере надобности».

Мы воспользуемся этим советом героя известного романа и тоже постараемся «подбирать» недостающие данные о клетке по мере их надобности, постепенно приближаясь к цели.

Итак, мы ищем ответ на два простых на вид вопроса:

— почему средний диаметр клеток мле-

Диаметр клетки	$d_{кл} \sim 10-20$ мкм
Отношение продолжительности жизни и сердечного цикла	$t_ж/t_с \sim 10^9$
Отношение продолжительности дыхательного и сердечного циклов	$t_д/t_с \approx 4$
Температура тела	$T_т \approx 37-38$ °C
Масса органа (по отношению к массе тела $m_т$): сердца легких крови скелета мышц	 $m_с/m_т \approx 0{,}6\%$ $m_л/m_т \approx 1\%$ $m_к/m_т \approx 5\%$ $m_{ск}/m_т \approx 6\%$ $m_м/m_т \approx 40\%$

Таблица 1

копитающих $d_{кл}$ составляет 10—20 микрон, а не, скажем, 1 или 100 микрон?

— почему $d_{кл}$ примерно одинаков для всех млекопитающих при огромном различии их масс? К примеру, масса землеройки 3 грамма, а слона 3 тонны, т.е. разброс масс достигает миллиона.

При оценке характерного диаметра клеток испробуем несколько подходов. Начнем с оценки, вообще не использующей информации о структуре и функциях клетки. Так и назовем ее —

Пальцем в небо

Клетка должна быть много больше размера атома ($\sim 10^{-10}$ м) и много меньше «человеческого» размера (~ 1 м). Первое позволяет пренебречь квантовыми эффектами, второе — построить из клеток, как из кирпичей, сложное сооружение живого организма с разнообразными функциями.

Среднее геометрическое между «атомным» и «человеческим» масштабами удовлетворяет указанным требованиям и дает правильный порядок величины:

$$\left(10^{-10}\ \text{м} \times 1\ \text{м}\right)^{1/2} = 10^{-5}\ \text{м},$$

но мало что проясняет. К тому же, если подставить в это соотношение характерные размеры землеройки и слона, то получим соответственно 2 и 20 микрон, т.е. существенное различие размеров.

Итак, без знания строения клетки, хотя бы примитивного, не обойтись.

«Кулинарный» подход

Зайдем с другого конца: сконструируем клетку млекопитающего из простейших составных частей (как в кулинарии: на одну порцию нужно взять яйцо, ложку сахара, стакан молока...) и прикинем ее размер.

Напомним кратко, с каким объектом мы имеем дело. Клетка — это элементарная единица живого. Основная информация как о самой клетке, так и об организме в целом хранится в ядре и записана на спирали ДНК. С помощью РНК происходит обработка этой информации, синтез белков и других необходимых клетке веществ. Необходимая энергия для синтеза накапливается в митохондриях. Среда, в которой протекают клеточные процессы, — вода. А мембраны как отделяют одни клетки от других, так и разделяют внутренние части клетки.

«Плясать» начнем от ДНК. Некоторые ее параметры приведены в таблице 2. Согласно этим данным, длина ДНК для разных млекопитающих находится в диапазоне

$$(1-5)\cdot 10^{9} \times 3{,}4\cdot 10^{-10} \sim 0{,}3-2\ \text{м},$$

а масса —

$$1{,}67\cdot 10^{-27} \times 500 \times (1-5)\cdot 10^{9} \sim$$
$$\sim (0{,}8-4)\cdot 10^{-15}\ \text{кг}.$$

Диаметр двойной спирали	$2\cdot 10^{-9}$ м
Расстояние вдоль спирали между соседними парами оснований	$3{,}4\cdot 10^{-10}$ м
Количество пар нуклеотидов в клетке млекопитающих	$(1-5)\cdot 10^{9}$
Масса пары нуклеотидов в атомных единицах массы	~ 500

Таблица 2

Какой объем может занимать такая ДНК? Очень плотная намотка ДНК в клубок с зазором между отдельными слоями порядка расстояния между основаниями (т.е. $4\cdot 10^{-10}$ м) приводит к объему клубка

$$V \sim 2\cdot 10^{-9} \times 4\cdot 10^{-10} \times (1-5)\cdot 10^{9} \times$$
$$\times 3{,}4\cdot 10^{-10} \sim (0{,}3-1{,}4)\cdot 10^{-18}\ \text{м}^3$$

и характерному размеру

$$d \sim V^{1/3} \sim 0{,}7-1{,}1\ \text{мкм}.$$

Плотность такого образования оказывается $\sim 3\cdot 10^{3}$ кг/м^3.

Полученные цифры при некотором размышлении вызывают сомнения:

— поскольку плотность получившегося ядра существенно превосходит плотность воды, то ядро может «погрузиться на дно» клетки, если его специально не удерживать вблизи ее центра;

— ДНК — не плоская структура, а спираль и ее так плотно не намотать;

— размотать быстро такой длинный клубок невозможно.

Эти соображения наводят на мысль о том, что намотка ДНК должна быть более рыхлой.[1]

Разумно предположить, что средняя плотность клубка ДНК в объеме, ограниченном мембраной, должна быть близка к плотности воды, при этом ядро более свободно «плавает» в клетке. В таком случае объем ядра клеток млекопитающих $\sim(0{,}8-4)\cdot10^{-18}$ м^3 и диаметр соответствующего шара $\sim$ 1,2 — 2 мкм. Мембрана, ограничивающая ядро, довольно тонкая ($\sim10^{-8}$м) и практически толщину не увеличивает.

Теперь «накрутим» остальное. Масса РНК, своеобразной «прислуги», должна, как это принято в приличных домах, в несколько раз превосходить массу «хозяйки» — ДНК. А масса «обстановки» (синтезированный с помощью ДНК и РНК белок и другие составляющие клетки) должна быть существенно больше массы РНК. Примем для оценки, что соотношение масс белка и ДНК масштаба 10:1. Все это содержимое, ограниченные мембранами, должно плавать в воде. Положим, что воды по объему вчетверо больше, чем остального содержимого клетки.

В итоге минимальный объем клеток млекопитающих должен быть

$$(V_{\text{кл}})_{\min}\sim(0{,}3-1{,}6)\cdot10^{-16}\ \text{м}^3,$$

а соответствующий диаметр сферы

$$(d_{\text{кл}})_{\min}\sim\left(\frac{6V_{\text{кл}}}{\pi}\right)^{1/3}\sim4-7\ \text{мкм}.$$

[1] *Об этом см., например, в книге М.Д.Франк-Каменецкого «Самая главная молекула» (М.: Наука, 1987, серия Библиотечка «Квант»).*

Т.е. клеток млекопитающих с диаметром меньшим 4-х микрон быть не может. Это уточняет нашу первую, «пальцевую» оценку.

Кроме того, «кулинарный» подход дает частичный ответ на оба главных вопроса, поставленные в начале:

— разброс минимальных диаметров клеток невелик: около двойки для всех млекопитающих (в то время, как длины ДНК отличаются в 5 раз);

— диаметр клетки млекопитающего не 1 микрон, а гораздо больше.

В заключение этого подхода приведем «кулинарный» рецепт одной из реальных клеток животных. На 100 частей живой клетки надо взять (по весу):

воды — 84 части,

белков — 7 частей,

углеводов и липидов — по 4 части,

РНК и ДНК — «на кончике ножа», соответственно 0,7 и 0,3 части.

Объем такой клетки $4\cdot10^{-15}$ м^3, диаметр 20 мкм и масса $3{,}5\cdot10^{-12}$ кг.

А теперь коснемся одной из важнейших функций клетки — обмена с внешней средой. Для обеспечения жизнедеятельности клетки нужно подводить к ней кислород, «топливо», отводить углекислый газ, продукты синтеза и шлаки.

Отметим, что не только характерный размер клеток животных, но и диаметры эритроцитов и капиллярных сосудов примерно одинаковы. Так, размер эритроцитов, участвующих в газообмене с клетками, меняется для млекопитающих в диапазоне 5—10 микрон. Диаметр капилляров составляет 3—30 микрон. Близость этих величин имеет глубокую природу. А именно: на расстояниях порядка 10 микрон происходит изменение характера движения вещества в организме. Назовем этот последний подход к оценке характерного размера клеток, эритроцитов и капилляров несколько загадочно:

Конвекция и диффузия

Поясним смысл этих понятий. Как обеспечить быструю доставку веществ к мно-

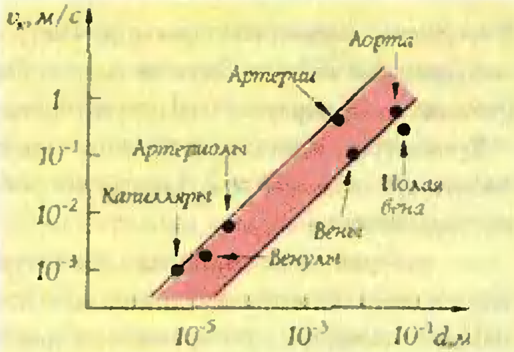


Рисунок 1. Зависимость скорости движения крови по кровеносным сосудам человека от их диаметра.

жеству клеток? Один из путей — организация направленного движения вещества потоком крови, т.е. конвекции. В теле животных так переносится кровь по сосудам. Конвекция весьма эффективна при движении по крупным сосудам. По мере удаления от сердца и приближения к «потребителям» (клеткам) сеть сосудов становится все разветвленнее, а их диаметр уменьшается. При этом должна снижаться скорость перемещения крови по сосудам. Причина в том, что при движении вязкой жидкости по сосуду ее давление падает, причем потери давления пропорциональны скорости жидкости и длине сосуда и обратно пропорциональны площади его сечения.[2]

Для того чтобы потери давления не были слишком велики (в противном случае жидкость сквозь такой канал просто не потекла бы), скорость потока должна убывать по мере уменьшения диаметра сосуда. То же касается и длины каналов. Эти тенденции действительно реализуются в кровеносной системе животных. В качестве примера на рисунке 1 приведена зависимость средней скорости от диаметра кровеносных сосудов у человека. Эта зависимость имеет примерно линейный характер:

$$v_к \sim (20-100)d.$$

Таким образом, по мере уменьшения диаметра кровеносных сосудов течение

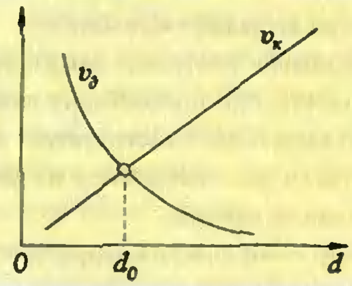


Рисунок 2. Вид зависимости скоростей $v_к$ и $v_д$ от характерного размера d.

все более замедляется. В некотором смысле эффективность конвекции при небольших значениях диаметра канала падает.

Теперь обратимся к диффузии.

Диффузия — это перемещение вещества за счет случайного блуждания его молекул. Двигаясь хаотично, молекула то удаляется от начальной точки, то приближается к ней. При этом оказывается, что среднее расстояние до начальной точки пропорционально не t (как при равномерном движении по прямой), а $\sqrt{t}$:

$$d = \sqrt{2Dt},$$

где введенный таким образом коэффициент D называют коэффициентом диффузии.[3] Выразив время t, найдем среднюю скорость распространения диффузионного процесса на расстояние d:

$$v_д \sim \frac{d}{t} \sim \frac{D}{d}.$$

Таким образом, на больших расстояниях процесс диффузии замедляется, на малых же он очень эффективен. Сопоставление формул для скорости конвективного $v_к$ и диффузионного $v_д$ процессов дает нам некоторый характерный размер d_0 (рис. 2):

$$d_0 \sim \left(\frac{D}{20-100}\right)^{1/2},$$

при котором скорости обоих процессов сравниваются.

Коэффициент диффузии веществ в воде имеет порядок $D \sim 10^{-9}$ м^2/с, поэтому

[2] *Подробнее об этом можно прочесть в статье «О высоких деревьях» («Квант», 1992, № 4, с. 11).*

[3] *О диффузии и о коэффициенте диффузии можно прочитать в статье А.Стасенко «Самолет в озоне» («Квант», 1992, № 5 с. 14).*

$d_0 \sim 3-7$ мкм. Это и есть масштаб размеров капилляров, клеток и эритроцитов. Иначе говоря, до величины d_0 происходит конвективное движение вещества, после — диффузионное всасывание.

Наша новая оценка практически совпала с «кулинарной». Это косвенно свидетельствует о том, что «деваться» клетке с ее размерами, в общем, некуда. Отличие 3 — 7 микрон (оценка) от 10 — 20 микрон (реальный размер клеток) может быть объяснено упрощенным характером подхода. А это, в свою очередь, — попыткой удержаться на сравнительно простом уровне изложения.

В заключение — несколько кратких пояснений к другим строчкам таблицы 1. Природа части из них в настоящее время еще не вполне ясна.

1. Ресурс сердца масштаба миллиарда ударов за время жизни. Эта цифра хорошо соответствует данным для млекопитающих. Для человека она, казалось бы, дает заниженную оценку — при периоде пульсаций сердца человека, равном примерно секунде, миллиарду соответствует 30 лет. Реальная продолжительность жизни людей в настоящее время в 2 — 3 раза больше. На рубеже веков она была близка к «табличной» (т.е. 30 лет) — в основном из-за эпидемий, высокой детской смертности и худших условий жизни и труда. Сейчас среди млекопитающих только человеку удалось подняться немного над статистикой.

Частота пульсаций сердца уменьшается с ростом массы тела. Так, сердце 30-граммовой мыши совершает 600 ударов в минуту и продолжительность ее жизни примерно 3 года. Для слона это соответственно 30 ударов в минуту и 60 лет.

2. Сама величина ресурса сердца необычайно велика. Среди движущихся механизмов в неживой природе соперничать с ним смогут, пожалуи, только часы, да и те, в отличие от сердца, нуждаются в периодической чистке и починке.

3. Три последние позиции таблицы 1 отражают некоторые оптимальные соотношения, отработанные в ходе длительной эволюции.

Так, в случае с температурой ее повышению соответствует быстрый рост активности ферментов — катализаторов обменных реакций. Но при температуре 40 — 45 °С начинается денатурация белков. Поэтому 37 — 38 °С — наилучшая температура для работы ферментов у наземных млекопитающих.

Отношение длительности дыхательного и сердечного циклов $\left(t_д/t_с\right) \approx 4$ для всех млекопитающих) должно следовать из того очевидного факта, что эритроциты крови разносят кислород от органов дыхания и возвращают обратно углекислый газ. Поэтому сердечный и дыхательный циклы должны быть жестко связаны. Однако эта связь не прямая.

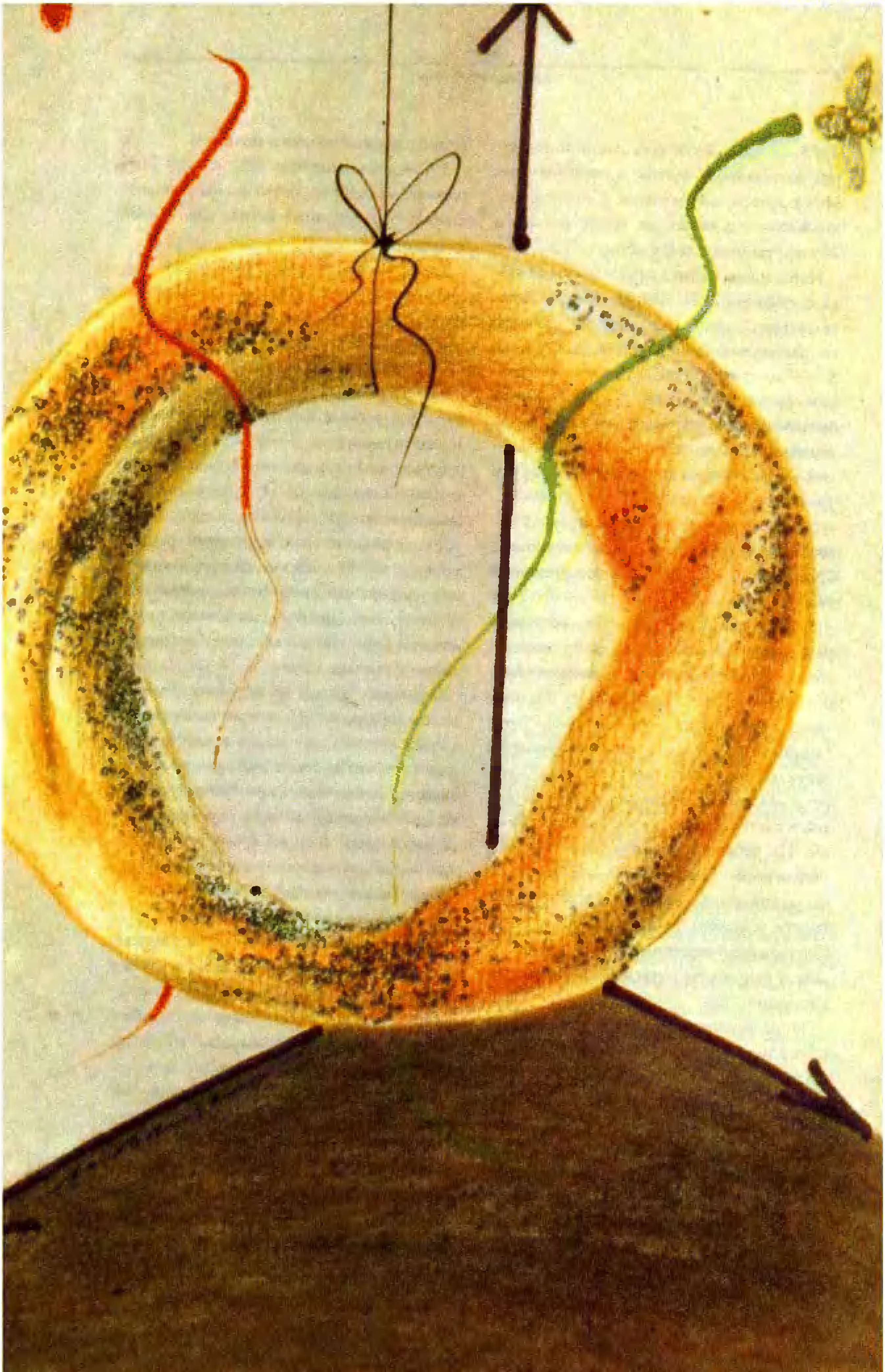
Причина постоянства относительной массы сердца, легких, мышц и некоторых других органов еще менее ясна. Часть из них (это относится к мышцам и костям скелета) может быть в принципе объяснена тем, что животные должны передвигаться в поисках пищи. В то же время относительная масса других важных органов: почек, печени и в особенности мозга растет по мере уменьшения размеров тела.

Тем, кто заинтересовался затронутыми темами, можно посоветовать обратиться к довольно интересным книгам:

К.Шмидт-Ниельсен. *Размеры животных: почему они так важны?* М.: Мир, 1987;

Р.Глазер. *Очерки основ биомеханики.* М.: Мир, 1988.

В первой содержится удачно изложенный огромный статистический материал по закономерностям и параметрам животных, птиц и рыб. Во второй большее внимание уделено моделям описания этих закономерностей.



Яков Дымарский
Ирина Заверач

Пересечение двух кривых на торе

Эта статья о топологии — науке, изучающей самые глобальные свойства фигур, те их свойства, которые не изменяются при различных деформациях фигур: изгибаниях, сжатиях, растяжениях... Одним из таких топологических инвариантов является количество точек пересечения двух замкнутых кривых на поверхности, если, правда, соответствующим образом условиться вычислять это количество. Но — все по порядку.

Тор

Бублик — толстая баранка.
С.И. Ожегов. Словарь Русского языка

Проще всего сказать, что тор — это поверхность бублика. Определение, конечно, наглядное, но для решения математических задач не очень удобное. Геометрически тор T получается при вращении окружности S_2 вокруг оси l (рис. 1). Во время вращения точка O движется по окружности S_1. На каждой точке C окружности S_1 «навешена» окружность, равная S_2 и полученная поворотом S_2 вокруг оси l на угол OMC.

Исследовать тор удобно с помощью его развертки. Разрезав T по S_2 и разогнув его, получим боковую поверхность *цилиндра* (рис. 2). Точки окружности S_2 при этом, если так можно выразиться, раздвоились, а окружность S_1 превратилась в отрезок. Теперь режем по этому отрезку и разворачиваем, — получаем прямоугольник (рис. 3). Пользоваться прямоугольником проще, нежели тором. Необходимо только помнить, что одна и та же точка тора может изображаться двумя или даже четырьмя точками *прямоугольника*.

Упражнения

1. Где должна находиться точка тора, чтобы иметь: а) одно; б) два; в) четыре изображения на *прямоугольнике?*

2. Назовите полуостров, принадлежащий России, который на политической карте мира обычно имеет два изображения.

Разрезав тор по S_2 и S_1, мы автома-

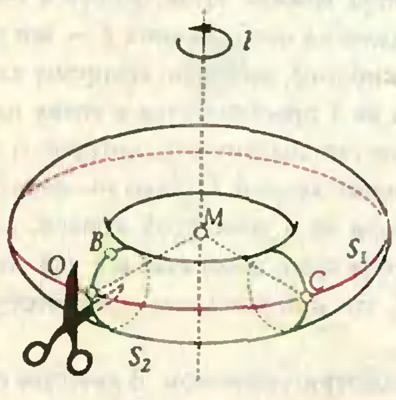


Рисунок 1

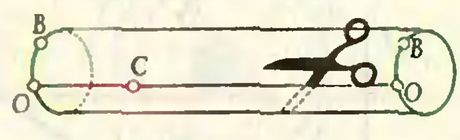


Рисунок 2

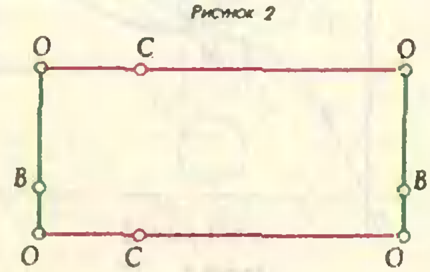


Рисунок 3

тически разрезали любую фигуру на торе, пересекаемую S_2 и S_1. Во избежание этой неприятности «размножим» прямоугольники на всю плоскость (рис. 4). В результате каждая точка тора имеет бесконечное число изображений (это плохо), но изображение любой фигуры не будет разрезанным (это хорошо). Координаты x и y на плоскости полностью определяют положение любой точки на торе. Их геометрический смысл — длины дуг окружностей S_1 и S_2, отсчитываемые от точки O и взятые со знаками «+» или «—» в зависимости от направления обхода окружностей. Принципиальное отличие введенных координат от привычных декартовых в том, что точка на торе имеет не одну пару координат, а бесконечное число пар.

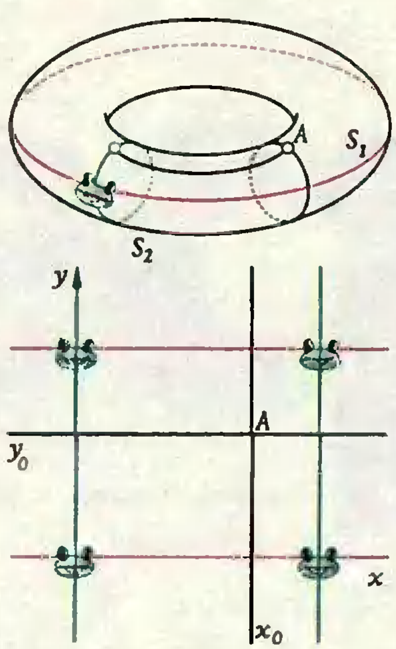


Рисунок 4

Кривые на торе

Но попробуем: может быть, кривая вывезет.

М.Е.Салтыков-Щедрин

Под замкнутой кривой на плоскости мы привыкли понимать кривую, получаемую движением кончика карандаша по бумаге, начинающуюся и кончающуюся в одной точке. Кривая на торе — кривая, проведенная на этой поверхности. Однако такого интуитивного определения нам будет недостаточно. Дадим более строгое определение. Пусть заданы окружность S, тор T и непрерывное отображение f этой окружности в тор. Такое отображение мы будем называть *замкнутым путем* на торе T, а образ этого отображения — *замкнутой кривой*. Итак, имеется область определения отображения f — все точки окружности S, закон, по которому каждая точка из S преобразуется в точку на T, и множество значений γ, которое и будет замкнутой кривой. Однако мы чаще будем говорить не о замкнутой кривой, а о замкнутом пути, обозначая его той же буквой f, что и порождающее его отображение.

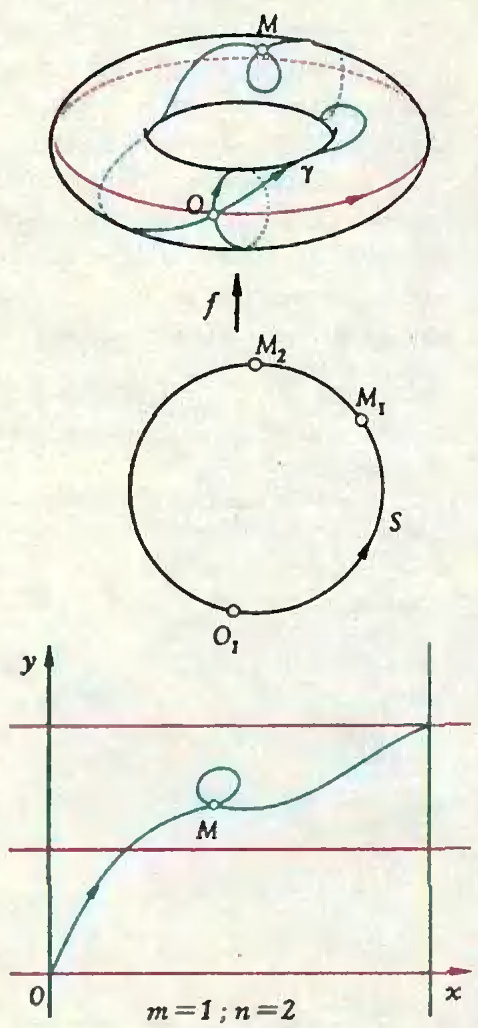
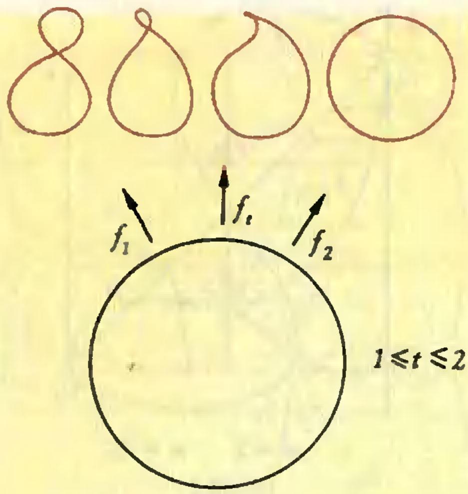


Рисунок 5

Рассмотрим примеры. В качестве области определения возьмем окружность S_1



f_t непрерывно изменяется с изменением t

Рисунок 6

(рис. 1) — определение не запрещает этого. Рассмотрим отображение φ_1, которое каждой точке S_1 ставит в соответствие ее же, т.е. тождественное отображение. Очевидно, множество значений γ совпадает в данном случае с областью определения S_1. Аналогично определим путь φ_2 с областью определения S_2.

Мы не исключаем возможности замкнутым путям иметь точки самопересечения. Так будет в том случае, если найдутся точки M_1 и M_2 на S, которые отображаются в одну и ту же точку тора: $f(M_1)=f(M_2)=M$ (рис. 5).

Деформация кривых на торе

Надо только начать и потом не отставать, гнуть свою линию, несмотря ни на что.

А.П.Чехов

Любые два замкнутых пути на плоскости можно продеформировать один в другой. Что это значит? Представим себе, что отображение f непрерывно меняется во времени. В момент $t=1$ оно совпадает с отображением f_1, а в момент $t=2$ — с отображением f_2. В промежуточные моменты t оно есть отображение f_t. Такое семейство отображений f_t называется деформацией замкнутого пути f_1 в путь f_2. Пример подобной деформации можно увидеть на рисунке 6. Если рассмотреть плоскость с дырой, то тут уже не всякие два замкнутых пути можно продеформировать один в другой. Например, на рисунке 7 путь f_1 нельзя продеформировать ни в путь f_2, ни в путь f_3 — мешает дырка.

Аналогично обстоит дело с замкнутыми путями на торе. Так, путь φ_1 нельзя продеформировать в φ_2, оставаясь на торе, — мешают «дырки» тора: одна внутренняя, другая внешняя. Какие же пути можно продеформировать друг в друга? Образный ответ на этот вопрос таков: друг в друга деформируются те замкнутые пути, которые одинаково намотаны вокруг внутренней и внешней дырок тора. Чтобы придать этому утверждению четкий

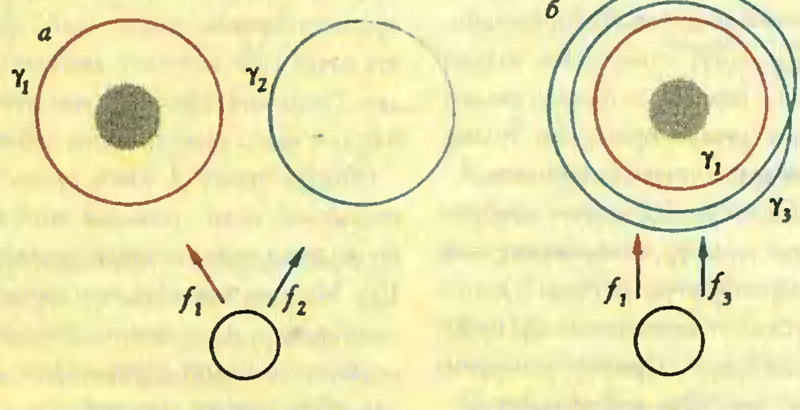


Рисунок 7

смысл, введем следующие характеристики путей: «число витков вокруг S_1» и «число витков вокруг S_2».

Зададим на окружности S стрелкой направление обхода — ориентируем S (рис. 5). Можно считать, что путь f проходит через точку $O = f(O_1)$. В противном случае перенесем начало координат O в точку $f(O_1)$. Пусть точка N движется по S в выбранном направлении, начиная от точки O_1, тогда точка $f(N)$ обойдет кривую γ, выйдя из O и вернувшись в нее же. В результате обхода по замкнутому маршруту γ мы совершим несколько полных оборотов вокруг внешней дырки тора. Каждому обороту припишем знак «+», если он совершен в том же направлении, что и единственный поворот пути φ_1. Это направление совпадает с направлением оси абсцисс. Знак «—» приписывается обороту в противоположную сторону. Алгебраическую сумму всех оборотов назовем «числом витков вокруг S_1». Аналогично, подсчитывая обороты вокруг внутренней дырки, определяем «число витков вокруг S_2». Запись $f(m, n)$ будет обозначать, что у пути f число витков вокруг S_1 равно m, а вокруг S_2 равно n. Числа m и n легко увидеть на плоскости Oxy (рис. 5).

Теорема 1. *Два пути $f_1(m_1, n_1)$ и $f_2(m_2, n_2)$ деформируются один в другой тогда и только тогда, когда $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$.*

Идея доказательства состоит в том, что деформация осуществляется непрерывным образом, и поэтому все характеристики кривой меняются непрерывно. Но числа m и n могут принимать только целые значения. Переход от одного целого числа к другому может произойти только скачком. Следовательно, m и n не меняются.

Пусть на плоскости Oxy пути изображаются дугами γ_1 и γ_2, соединяющими изображения O_1 и O_2 точки O (рис. 8), т.е. обе кривые проходят через точки $O_1(0; 0)$ и $O_2(2\pi R_1 m_1, 2\pi R_2 n_1)$. Продеформируем на плоскости γ_1 в γ_2. Эта деформация порождает искомую деформацию пути f_1 в

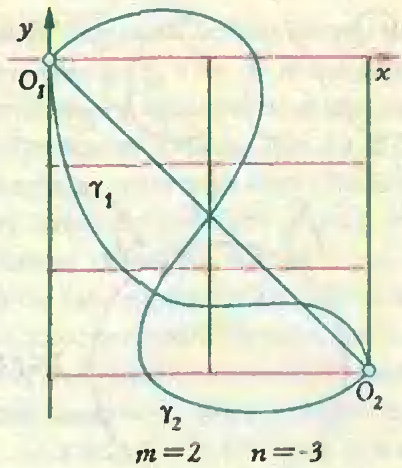


Рисунок 8

путь f_2 на торе.

Среди кривых с данным набором витков (m, n) выделим ту, которая на плоскости изображается отрезком, соединяющим точки $O_1(0, 0)$ и $O_2(2\pi R_1 m, 2\pi R_2 n)$ (рис. 8). Если числа m и n взаимно просты, то отрезок O_1O_2 не проходит через другие узлы решетки на плоскости. А если числа m и n имеют общие делители, то отрезок O_1O_2 разобьется узлами решетки на $k = \text{НОД}(m, n)$ частей. Это означает, что кривая на торе будет проходиться при движении по соответствующему пути ровно k раз.

Взаимное расположение двух кривых

В общем случае ставить вопрос о количестве общих точек двух кривых проблематично. Так, кривые на рисунке 9, *а* имеют бесконечное множество общих точек, а на рисунках 9, *б* и 9, *в* — одну общую точку, но при сколь угодно малой деформации эта точка либо исчезает, либо их становится две. Такие ситуации назовем нетипичными и будем их по возможности избегать.

Общую точку A двух кривых назовем *типичной*, если кривые в этой точке имеют касательные, причем различные (рис. 10). Можно показать, что типичная точка устойчива, т.е. не теряет типичности при достаточно малой деформации, а нетипичная общая точка неустойчива, т.е. может быть устранена сколь угодно малой дефор-

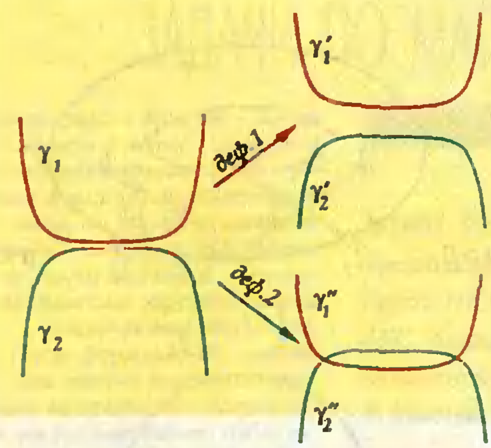


Рисунок 9а

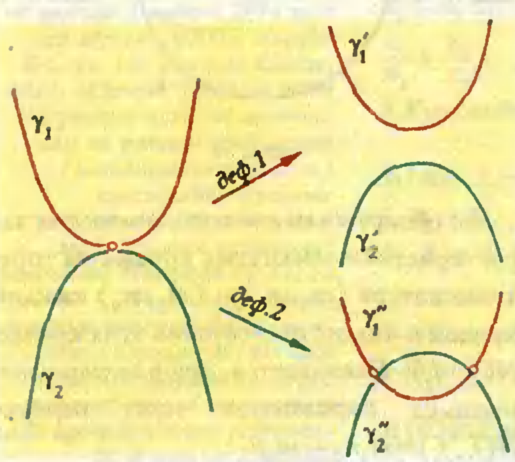


Рисунок 9б

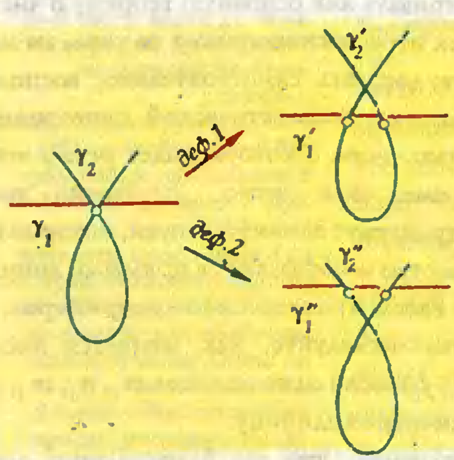


Рисунок 9в

мацией (еще раз взгляните на рисунок 9).

Будем говорить, что две кривые находятся в типичном положении, если они имеют только типичные общие точки или же совсем не имеют общих точек. Справедлива следующая

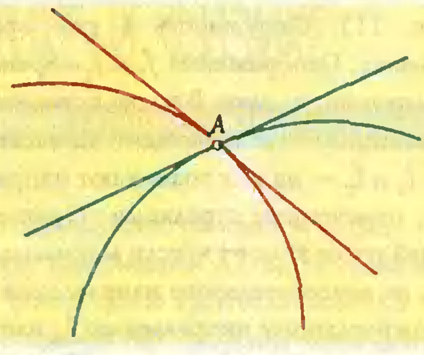


Рисунок 10

Теорема 2. *Количество общих точек двух замкнутых кривых, находящихся в типичном положении, конечно.*

Заметим, что незамкнутые кривые могут иметь бесконечное число типичных общих точек. Например, точки пересечения синусоиды с осью Ox.

Итак, мы можем подсчитать количество общих точек двух замкнутых кривых, находящихся в типичном положении. Если же кривые находятся в *нетипичном* положении, то с помощью малой деформации их можно привести в типичное положение и... И ничего не получится, так как разные деформации приводят к разным результатам (опять рисунок 9). Что же отсюда следует? Следует, что либо задача о количестве общих точек некорректна, либо мы еще не научились правильно подсчитывать это количество.

Учимся считать количество общих точек

Ты, пожалуйста, их перечти, — сказал Чичиков. — и сделай подробный реестрик всех поименно.

Н.В.Гоголь

Вспомним, что при подсчете числа витков пути вокруг S_1 и S_2 существенным был учет направления обхода, т.е. ориентация витка. Попробуем ориентировать общие точки путей, после чего подсчитаем их количество с учетом ориентации.

Пусть f_1 и f_2 — рассматриваемые пути, находящиеся в типичном положении (рис. 11). Окружность S уже ориентирована. Отображения f_1 и f_2 переносят ориентацию на дуги. В точке пересечения ориентация с дуг переходит на касательные l_1 и l_2 — на них возникают направления, отмеченные стрелками. Припишем общей точке знак «+», если минимальный угол от положительного направления l_1 к положительному направлению l_2 направлен против часовой стрелки. Знак «—» приписываем точке, если названный угол направлен по часовой стрелке. Алгебраическую сумму всех общих точек назовем *индексом пересечения путей* f_1 и f_2. Обозначим его $N(f_1, f_2)$. Вычисление индекса — это правильный способ подсчитывать количество точек пересечения. Подтверждением служит

Теорема 3. *Индекс пересечения не меняется при деформации, т.е. является топологическим инвариантом.*

Действительно, в результате деформации индекс может поменяться только при переходе через нетипичную точку. Но на самом деле этого не происходит. Ситуации, изображенной на рисунке 9, *а* можно вообще избежать при деформации. Что же касается рисунков 9 *б*, *в*, то здесь индекс не меняется при малой деформации. Посмотрите на рисунок 9, *б*. В результате деформации 1 общая точка исчезла, т.е. вклад в индекс нулевой. В результате деформации 2 она распалась на две точки A и B, имеющие разную ориентацию и в сумме дающие тоже нуль (сравните с рисунком 11).

Упражнения

3. Рассмотрите самостоятельно случай на рисунке 9, *в*.

4. Докажите свойство индекса: $N(f_1, f_2) = -N(f_2, f_1)$.

5. Докажите, что количество общих точек двух путей f_1 и f_2 без учета ориентации не меньше, чем $N(f_1, f_2)$, т.е. модуль индекса оценивает количество общих точек снизу.

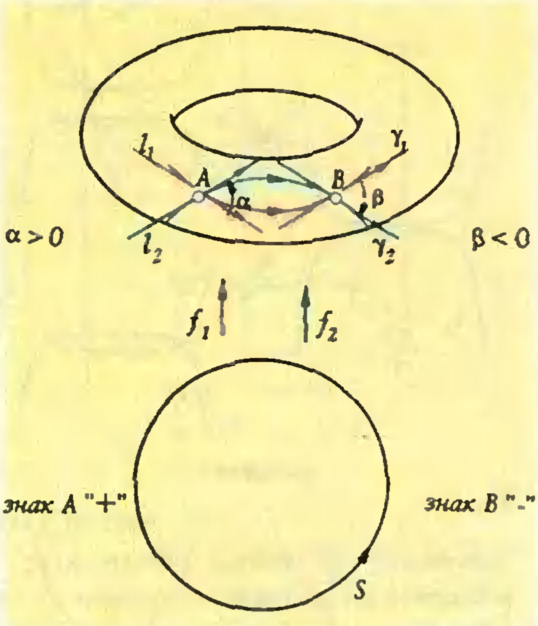


Рисунок 11

Мы обнаружили две топологических характеристики замкнутых кривых на торе: число витков (m_1, n_1) и (m_2, n_2) каждой кривой и индекс пересечения этих кривых $N(f_1, f_2)$. Оказывается, *вторая характеристика выражается через первую*: $N(f_1, f_2) = m_1 n_2 - m_2 n_1$.

Это утверждение, которое можно рассматривать как основную теорему о числе точек пересечения кривых на торе, вы можете доказать самостоятельно, воспользовавшись топологической инвариантностью чисел, о которых идет речь в этой теореме. Для этого достаточно рассматривать те замкнутые пути, которые на развертке изображаются прямыми линиями. Рассмотрите несколько примеров, а потом исследуйте, как меняется число $N(f_1, f_2)$, если одно из чисел m_1, n_1, m_2, n_2 увеличить на единицу.

Надеемся, что вы благополучно добрались до этих заключительных строк и чтение позволило вам хотя бы немного почувствовать дух топологических идей и методов, которые сейчас проникают во все области математики.

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 1994 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11/12 — 93» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например М1401 или Ф1408. В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1406— М1410, Ф1408—Ф1417 предлагались на заключительных этапах Всероссийских олимпиад.

ЗАДАЧИ М1401 — М1410

М1401. На дуге BC окружности, описанной около треугольника ABC (не содержащей A), взята точка K. Пусть NK и MK — биссектрисы треугольников AKB и AKC. Докажите, что прямая MN проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

В.Акопян

М1402. Докажите для положительных чисел $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ $(n>2)$ неравенство
$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_1} \ge \frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\ldots+\frac{x_1}{x_n}.$$

А.Курляндчик, А.Мельцер

М1403. Каждая сторона A_kA_{k+1} выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ $(n>4)$ продлевается на равную ей длину $A_{k+1}B_k = A_kA_{k+1}$. Докажите, что площадь полученного n-угольника $B_1B_2\ldots B_n$ не более чем в 5 раз превосходит площадь исходного.

Э.Ясиновый

М1404. Три числа x, y, z удовлетворяют условиям $x+y+z=0$, $xyz=2$. Найдите максимум величины $x^2/y+y^2/z+z^2/x$.

С.Дойчев, Р.Козарев

М1405. В основании пирамиды лежит правильный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$, B — вершина пирамиды. Известно, что углы BA_1A_2, BA_2A_3, ..., $BA_{n-1}A_n$, BA_nA_1 равны. Докажите, что пирамида правильная.

В.Сендеров

М1406. На доске написано n выражений вида $*x2+ *x+*=0$ (n — нечетное число). Двое играют в такую игру. Ходят по очереди. За ход разрешается заменить одну из звездочек числом, не равным нулю. Через $3n$ ходов получится n квадратных уравнений. Первый игрок стремится к тому, чтобы как можно большее число этих уравнений не имело корней, а второй хочет ему помешать. Какое наибольшее число уравнений, не имеющих корней, может получить первый игрок независимо от игры второго?

И.Рубанов

M1407. В семейном альбоме есть а) десять, б) n фотографий. На каждой из них изображены три человека: в центре стоит мужчина, слева от мужчины — его сын, а справа — его брат. Какое наименьшее количество различных людей может быть изображено на этих фотографиях, если известно, что все десять (соответственно, n) мужчин, стоящих в центре, различны?
С.Конягин

M1408. За круглым столом сидит компания из тридцати человек. Каждый из них либо дурак, либо умный. Всех сидящих спрашивают: «Кто ваш сосед справа — умный или дурак?» В ответ умный говорит правду, а дурак может сказать как правду, так и ложь. Известно, что количество дураков не превосходит F. При каком наибольшем значении F всегда можно, зная эти ответы, указать на умного человека в этой компании?
О.Ляшко

M1409. Докажите, что существует такое натуральное число n, что если правильный треугольник со стороной n разбить прямыми, параллельными его сторонам, на n^2 правильных треугольников со стороной 1, то среди вершин этих треугольников можно выбрать $1993n$ точек, никакие три из которых не являются вершинами правильного треугольника (не обязательно со сторонами, параллельными сторонам исходного треугольника).
С.Августинович, Д.Ван-дер-Флаасс

M1410. а) Верно ли, что любые два прямоугольника равной площади можно расположить на плоскости так, что любая горизонтальная прямая, пересекающая один из них, будет пересекать и второй, причем по отрезку той же длины?
б) Докажите, что если два прямоугольных параллелепипеда имеют равные объемы, то их можно расположить в пространстве так, что любая горизонтальная плоскость, пересекающая один из них, будет пересекать и второй, причем по многоугольнику той же площади.
Д.Терешин

ЗАДАЧИ Ф1408 — Ф1417

Ф1408. На прямолинейном горизонтальном участке железной дороги стояла платформа с грузом. Ночью к ней подкрался похититель, захвативший с собой легкий и упругий резиновый шнур. Привязав один конец шнура к платформе, а второй к своему поясу, он бросился бежать с постоянной скоростью 5 м/с вдоль железнодорожного полотна. Удар... Через некоторое время похититель очнулся, лежа на платформе, которая двигалась со скоростью 9 м/с. Во сколько раз масса платформы превышала массу похитителя? Что же там все-таки произошло? Считайте, что ботинки злодея не проскальзывали, а трение качения было пренебрежимо малым.

А.Варгин

Ф1409. Две большие горизонтальные пластины расположены одна над другой на расстоянии d. Каждая пластина поддерживается при определенной температуре (температура нижней пластины выше). Оцените разность температур пластин, при которой в системе возникнет конвекция. Воздух считайте идеальным газом, теплообменом между соседними порциями воздуха при конвекции можно пренебречь.

С.Кленов

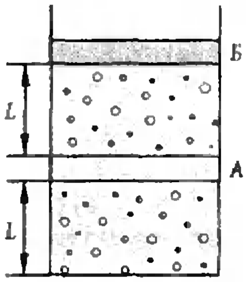


Рисунок 1

Ф1410. В стоящем на столе теплоизолированном цилиндрическом сосуде с помощью легкого теплопроводящего поршня A и тяжелого теплонепроницаемого поршня $Б$ образовано два отделения длиной по $L = 0{,}4$ м, в каждом из которых находится по одному молю идеального одноатомного газа (рис. 1). Первоначально система находится в тепловом равновесии. Газ медленно нагревают, сообщив ему количество теплоты $Q = 200$ Дж. При какой величине силы трения между поршнем A и стенками цилиндра этот поршень останется неподвижным? Поршень $Б$ может двигаться без трения.

А.Блинов

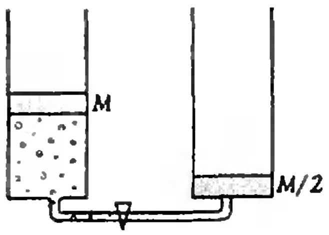


Рисунок 2

Ф1411. Два одинаковых цилиндрических сосуда соединены друг с другом короткой и тонкой трубкой, перекрытой краном (рис. 2). В левом сосуде под поршнем массой M находится некоторое количество одноатомного идеального газа при температуре T_0. В правом сосуде газа нет, и поршень массой $M/2$ лежит на дне. Откроем кран. Какой будет температура газа в состоянии равновесия? Масса газа равна $M/10$. Теплоемкостью поршней и сосуда можно пренебречь. Трение пренебрежимо мало. Воздух снаружи отсутствует. Вся система теплоизолирована.

В.Овчинкин

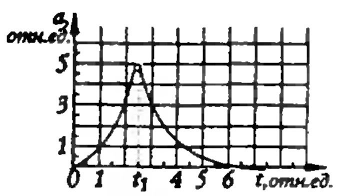


Рисунок 3

Ф1412. Заряженная капля уравновешена в воздухе электрическим полем. Начиная с момента $t_0 = 0$ поле начинает уменьшаться и к моменту t_1 обращается в нуль. На рисунке 3 приведен график зависимости ускорения падающей капли от времени (в относительных единицах). Используя этот график, найдите максимальное ускорение капли. Силу сопротивления воздуха считайте пропорциональной скорости капли.

А.Шеронов

Ф1413. Электрический утюг без терморегулятора рассчитан на напряжение 220 В. При включении в сеть 127 В он нагрелся только до температуры +127 °С, для глажения же нужна температура от +200 °С до +300 °С. Можно ли гладить этим утюгом при напряжении сети 220 В? Теплоотдачу считайте пропорциональной разности температур. Сопротивление нагревательного элемента утюга неизменно. Температура в комнате +20 °С.

М.Гаврилов

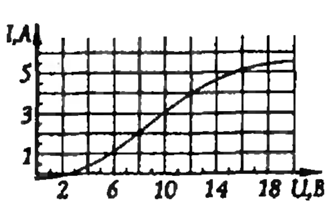


Рисунок 4

Ф1414. Зависимость величины тока от приложенного напряжения для лампы неизвестной конструкции приведена на рисунке 4. Эту лампу подключают к источнику последовательно с резистором, сопротивление которого 10 Ом. При каком напряжении источника мощность, потребляемая лампой, составит 1/4 от мощности, которую развивает источник?

Б.Гринченко

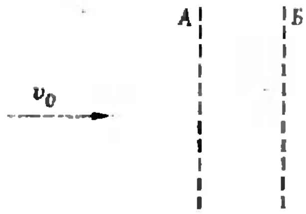


Рисунок 5

Ф1415. Тонкий пучок электронов, движущийся со скоростью v_0, пролетает сквозь сетки A и $Б$ (рис. 5), подключенные к выводам генератора переменного напряжения, изменяющегося по закону $U = U_0 \sin \omega t$. Время пролета между сетками во много раз меньше периода колебаний напряжения. Оцените расстояние, на котором электроны соберутся в сгустки. Изменение скорости от воздействия переменного электрического поля считайте малым по сравнению с v_0.

М.Сметанин

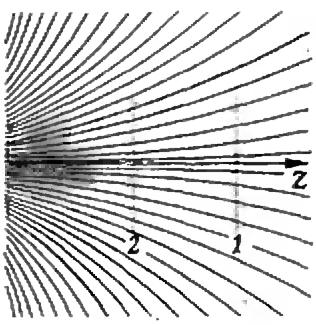


Рисунок 6

Ф1416. На рисунке 6 изображены линии магнитной индукции поля вблизи торца круглой катушки с железным сердечником. Ось Z является осью симметрии магнитного поля. Вдали от катушки находится кольцо из сверхпроводника. Ток в кольце отсутствует. Затем кольцо вносят в магнитное поле — сначала в положение *1*, затем в положение *2*. Определите отношение токов в кольце в этих двух случаях. Определите также отношение сил, действующих на кольцо в положениях *1* и *2*.

С.Козел

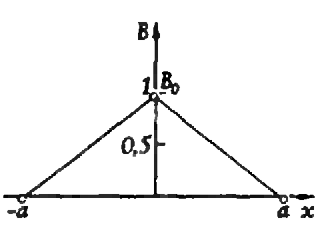


Рисунок 7

Ф1417. Колечко диаметром $d = 6$ мм, сделанное из очень тонкой проволоки с удельным сопротивлением $\rho = 2 \cdot 10^{-8}$ Ом · м и плотностью $D = 9 \cdot 10^3$ кг/м^3, пролетает по прямой между полюсами магнита, не успев при этом повернуться. Оцените изменение скорости кольца, если его скорость перед пролетом была $v_0 =$ $=20$ м/с. Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости кольца, вектор скорости кольца параллелен плоскости кольца. Зависимость магнитной индукции поля от координаты x (вдоль которой движется кольцо) приведена на рисунке 7, где $B_0 = 1$ Тл, a=10 см.

В.Афанасьев

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ М1381 – М1385

***М1381.** Окружность разбита 2n точками на равные дуги. Докажите, что у любой замкнутой ломаной линии из 2n звеньев с вершинами во всех этих точках есть два параллельных звена.*

Обозначим n точек деления числами $0,1,..., 2n-1$; эти расположенные по кругу числа мы будем рассматривать «по модулю $2n$»: запись $a \equiv b$ будет означать, что $a-b$ делится на $2n$. Если i, j и k, l — две пары из этих чисел и $i+j \equiv k+l$, то отрезки ij и kl параллельны (поскольку $i-k \equiv l-j$, эти отрезки служат основаниями равнобокой трапеции или прямоугольника).

Предположим, что существует замкнутая $2n$-звенная ломаная без параллельных звеньев, т.е. некоторая перестановка $i_1, i_2, ..., i_{2n}$ чисел $0,1, ..., 2n-1$ такая, что все попарные суммы

$$i_1+i_2, \quad i_2+i_3,..., \quad i_{2n-1}+i_{2n}, \quad i_{2n}+i_1 \qquad (*)$$

различны по модулю $2n$. Тогда набор $(*)$ — это тоже некоторая перестановка чисел $0, 1, ..., 2n-1$, а его сумма должна быть равна (по модулю $2n$) сумме $S=0+1+...+(2n-1)=(2n-1)n$.

С другой стороны, сумма чисел набора $(*)$ очевидно равна $2(i_1+i_2+...+i_n) \equiv 2S$ по модулю $2n$. Но $2S=2n(2n-1) \equiv 0$, а S не делится на $2n$ (поскольку $2n-1$ не делится на 2).

Полученное противоречие показывает, что такой замкнутой ломаной не существует.

В.Произволов

***М1382.** Все точки плоскости раскрашены в два цвета — черный и белый — произвольным образом. Докажите, что найдется треугольник с вершинами одного цвета и меньшей стороной длины 1, отношение углов которого равно а) 1:2:3; б) 1:2:4.*

Заметим прежде всего, что для любого числа $r>0$ можно выбрать две точки одного цвета на расстоянии r (достаточно рассмотреть три вершины правильного треугольника со стороной 2).

а) Рассмотрим вершины правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 1, среди которых A и D — одного цвета, скажем, белые. Если одна из точек B, C, E или F — тоже белая, то она вместе с A и D даст нужный треугольник. Если же все они — черные, то нужный треугольник — это BCE.

б) Рассмотрим вершины правильного семиугольника $ABCDEFG$ со стороной 1, среди которых A и B — белые. Если одна из точек D или F — белая, то она вместе с A и B дает нужный треугольник. Если обе они — черные, а одна из точек G или C — черная, то она вместе с D и F дает нужный треугольник. Если же G и C — белые, то нужный треугольник — ACG.

Разнообразным задачам о раскрасках плоскости посвящена книга, которую автор задачи готовит к изданию. Он с удовольствием откликнется на письма читателей с новыми задачами такого типа.

А.Сойфер

M1383. Пусть сумма n чисел равна 0, причем m — наименьшее из них, а M — наибольшее. Докажите, что

а) сумма квадратов этих чисел не превосходит —mMn;

б) сумма четвертых степеней этих чисел не превосходит $-mMn\left(m^2+M^2+mM\right)$.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — числа задачи:

$m \le x_i \le M$, $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$.

Обозначим сумму их квадратов через D, а сумму четвертых степеней — через F.

а) **Первое решение.** Для каждого числа x_i задачи имеем

$$\left(x_i-m\right)\left(x_i-M\right) \le 0,$$

или

$$x_i^2 \le (m+M)x_i - mM. \qquad (*)$$

Сложив n этих неравенств, получаем

$$D \le -nmM.$$

Второе решение. При $m = M$ утверждение очевидно. Пусть $m<M$. Расположим в точках (x_i, x_i^2), где x_i — числа задачи, единичные массы. Проведем через точки (m, m^2) и (M, M^2) прямую. Ее уравнение —

$$\frac{x-m}{M-m}=\frac{y-m^2}{M^2-m^2}.$$

Поскольку все массы расположены под прямой, этим же свойством обладает и центр масс $(0, D/n)$. Поэтому

$$-m(m+M)+m^2 \ge \frac{D}{n},$$

что и требовалось доказать.

б) **Первое решение.** Как и во втором решении пункта а), будем считать $m<M$. Попытаемся найти многочлен x^4+ax+b, имеющий корнями числа m и M. Заметим сразу, что многочлен такого вида имеет не более двух корней. Действительно, между любыми последовательными корнями многочлена найдется корень его производной. Следовательно, если многочлен имеет хотя бы три корня, то его производная $4x^3+a$ имеет не менее двух корней. Но уравнение $4x^3=-a$ имеет единственный корень.

Из системы

$$\begin{cases} m^4+am+b=0, \\ M^4+aM+b=0 \end{cases}$$

получаем

$$a=-\left(m^2+M^2\right)(m+M),$$

$$b=mM\left(m^2+M^2+mM\right).$$

С другой стороны, при этих значениях a и b равенства системы выполняются.

Окончание решения аналогично первому решению пункта а).

Второе решение. Рассуждая так же, как при втором решении пункта а), получаем уравнение прямой

$$\frac{x-m}{M-m}=\frac{y-m^4}{M^4-m^4},$$

после чего без труда приходим к неравенству

$$-m\left(M^2+m^2\right)(M+m)+m^4\geq\frac{F}{n},$$

что и требовалось доказать.

Третье решение. Для каждого числа x_i задачи из (*) следует

$$x_i^4\leq\left((m+M)x_i-mM\right)^2=$$

$$=(m+M)^2x_i^2-2(m+M)mMx_i+m^2M^2.$$

Сложив n этих неравенств и воспользовавшись утверждением пункта а), получаем

$$F\leq-nmM(m+M)^2+nm^2M^2,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Неравенство (*), а следовательно, и неравенства задачи превратятся в равенства, если k из чисел x_i равны m, а $n-k$ остальных равны M (при этом $km+(n-k)M=0$).

Н.Васильев, В.Сендеров, А.Туцеску

М1384. *ABC — неравнобедренный остроугольный треугольник; O и I — центры описанного и вписанного кругов, H — ортоцентр треугольника. Докажите, что четырехугольники $AOIH$, $BOIH$ и $COIH$ невырождены и среди них ровно два выпуклых.*

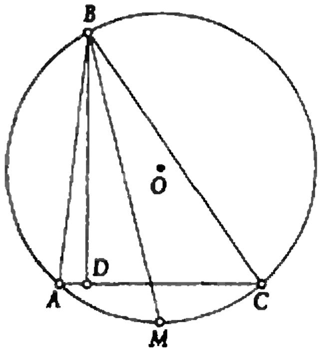


Рисунок 1

Решению предпошлем легко доказываемое предложение.

Лемма. *В треугольнике биссектриса делит пополам угол между высотой и радиусом описанного круга, проведенным в ту же вершину.*

Доказательство. Пусть BM — биссектриса угла ABC (рис. 1). Так как $OB=OM$, то $\angle OBM=\angle OMB$. Так как точка M — середина дуги AMC, то прямые OM и BD параллельны. Следовательно, $\angle DBM=\angle BMO$, отсюда $\angle OBM=\angle DBM$, что и требовалось доказать.

Решение задачи. Покажем вначале, что точки O и H не могут лежать на одной прямой с какой-либо из вершин треугольника (в частности, эти точки не могут совпадать). Действительно, в этом случае выходящие из вершины медиана и высота совпадают, и треугольник оказывается равнобедренным.

Отсюда и из леммы уже следует, что $AOIH$, $BOIH$ и $COIH$ — невырожденные многоугольники (четырехугольники либо треугольники).

Пусть прямая OH пересекает стороны AB и BC треугольника, $BC>AB$. Для завершения решения достаточно доказать, что точка I лежит внутри той же полуплоскости

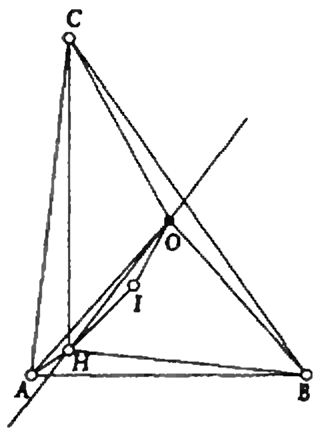


Рисунок 2

с границей OH, что и точка B (рис. 2). Докажем это. Обозначим $BD = h_B$. Имеем: $CD > AD$. Восставив перпендикуляр к середине отрезка AC, получаем: точка O принадлежит треугольнику BCD.

Обозначим через E (K) точку пересечения прямой AI (CI) с прямой OH. Необходимо доказать, что точки на прямой расположены в следующем порядке: O, K, E, H, т.е. что

$$\frac{OK}{KH} < \frac{OE}{EH}.$$

Но биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Отсюда и из леммы получаем

$$\frac{OK}{KH} = \frac{CO}{CH}, \quad \frac{OE}{EH} = \frac{AO}{AH}.$$

Доказываемое утверждение можно теперь переписать так:

$$\frac{AH}{AO} < \frac{CH}{CO},$$

или

$CH > AH.$

Но поскольку $CD > AD$, то $CH > AH$.

Отсюда и следует утверждение задачи.

Замечания

1. Нетрудно показать, что прямая OH пересекает большую и меньшую стороны треугольника ABC. Значит, выпуклыми являются четырехугольники, соответствующие большему и меньшему его углам.

2. Задача допускает также и алгебраическое решение.

В.Сендеров

М1385. *Пусть ABC — произвольный треугольник. Докажите, что*
а) для любого правильного треугольника $A_1B_1C_1$ выполнено неравенство
$$A_1A^2 + B_1B^2 + C_1C^2 \ge \left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right)/6 - 2\sqrt{3}S_{ABC};$$
б) существует правильный треугольник $A_1B_1C_1$, для которого это неравенство превращается в равенство.

Выясним сначала, как нужно выбрать правильный треугольник $A_1B_1C_1$, чтобы сумма $\sigma = A_1A^2 + B_1B^2 + C_1C^2$ была наименьшей. Для этого воспользуемся следующей основной леммой:

Пусть P, Q, R — три точки плоскости. Точкой, для которой сумма квадратов расстояний до данных точек минимальна, является центр тяжести M (точка пересечения медиан) треугольника PQR, причем эта минимальная сумма равна

$$\delta = PM^2 + QM^2 + RM^2 = \left(PQ^2 + QR^2 + RP^2\right)/3. \qquad (1)$$

Выбрав любую точку O на плоскости и обозначив векторы OP, OQ, OR, OM через p, q, r, $m = (p+q+r)/3$, перейдем к такой векторной формулировке леммы:

Минимальное значение суммы

$$(p-u)^2 + (q-u)^2 + (r-u)^2 \qquad (2)$$

для данных векторов p, q, r достигается при $u = m = (p+q+r)/3$ *и равно*

$$\delta = \left((p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2\right)/3. \qquad (3)$$

(Здесь запись v^2 означает скалярный квадрат вектора; *через vw ниже обозначается скалярное произведение* векторов v и w.) Для доказательства преобразуем (2) к виду

$$p^2+q^2+r^2-2(p+q+r)u+3u^2 =$$

$$= p^2+q^2+r^2-6mu+3u^2 =$$

$$= p^2+q^2+r^2-3m^2+3(m-u)^2.$$

Ясно, что наименьшее значение достигается при $u = m$ и равно

$$\delta = p^2+q^2+r^2-3m^2. \qquad (4)$$

Удобно выбрать в качестве начала O центр тяжести M; тогда в роли p, q, r будут выступать вектора $a = p - m$, $b = q - m$, $c = r - m$, для которых (рис.1)

$$a+b+c=0. \qquad (5)$$

Возведя это равенство в квадрат, получим

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=0.$$

При этом, как следует из (3) и (4),

$$\delta = a^2+b^2+c^2 = -2(ab+bc+ca), \qquad (6)$$

а поэтому

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 3\delta, \qquad (7)$$

откуда следуют равенства (1) и (3).

Перейдем теперь к решению задачи.

Ясно, что сумма $\delta = AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2$ уменьшится, если сдвинуть один из треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ так, что их центры тяжести M и M_1 совместятся. В самом деле, сумма векторов, ведущих из центра тяжести каждого треугольника в его вершины, — обозначим их a, b, c и a_1, b_1, c_1 — равна 0, поэтому

$$a_1-a+b_1-b+c_1-c=0.$$

Пусть $MM_1 = u$ (рис.2). По лемме, минимальное значение выражения

$$(a_1-a+u)^2+(b_1-b+u)^2+(c_1-c+u)^2$$

достигается при $u = 0$. (Это рассуждение годится для любых двух треугольников.)

Пусть теперь $A_1B_1C_1$ — правильный треугольник с центром в центре тяжести M треугольника ABC.

Повернем вокруг M треугольник MAA_1 на 120° по часовой стрелке в новое положение MPC_1, а треугольник MBB_1 — на 120° против часовой стрелки — в новое положение

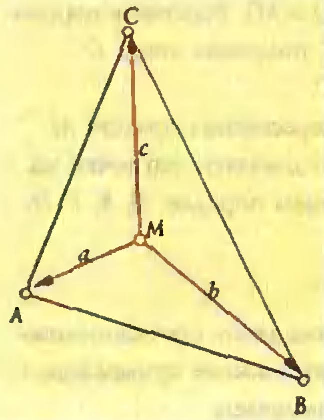


Рисунок 1

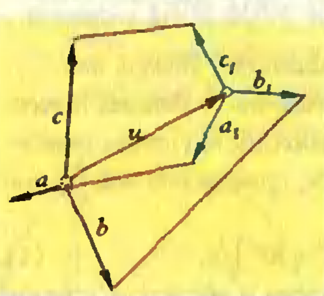


Рисунок 2

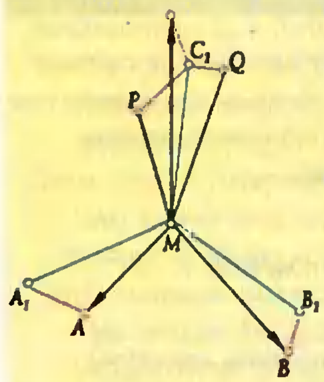


Рисунок 3

MQC_1 (рис. 3). Таким образом, поскольку $AA_1 = PC_1$, $BB_1 = QC_1$, задача свелась к следующей: нужно выбрать точку C_1 такую, чтобы сумма

$$\sigma = PC_1^2 + QC_1^2 + CC_1^2$$

была наименьшей. Ответ дает лемма: C_1 нужно поместить в центре тяжести треугольника PQC, при этом

$$\sigma_{\min} = \left(PQ^2 + QC^2 + CP^2\right)/3.$$

Пусть длины отрезков MA, MB, MC равны a, b, c, а углы между ними: $\angle BMC = \alpha$, $\angle CMA = \beta$, $\angle AMB = \gamma$. Все углы будем считать направленными против часовой стрелки. Тогда $\angle QMC = \alpha - 120°$, $\angle CMP = \beta - 120°$ и, значит, $\angle PMQ = -\angle QMP = -\alpha - \beta + 120° = \gamma - 120°$. Квадраты сторон треугольника PQC можно выразить по теореме косинусов через отрезки $MP = a$, $MQ = b$, $MC = c$ и углы между ними, а затем воспользоваться формулой

$$2\cos(\varphi - 120°) = \cos\varphi - \sqrt{3}\sin\varphi;$$

тогда

$$PQ^2 = a^2 + b^2 + ab\cos\gamma - \sqrt{3}ab\sin\gamma,$$

$$QC^2 = b^2 + c^2 + bc\cos\alpha - \sqrt{3}\,bc\sin\alpha,$$

$$CP^2 = c^2 + a^2 + ca\cos\beta - \sqrt{3}\,ca\sin\beta.$$

Сложим полученные равенства. Правые члены дадут в сумме $2\sqrt{3}S_{ABC}$, а удвоенная сумма квадратов и сумма скалярных произведений векторов $a = \overrightarrow{MA}$, $b = \overrightarrow{MB}$, $c = \overrightarrow{MC}$, согласно (6) и (7), дадут

$$2\delta - \delta/2 = 3\delta/2 = \left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right)/2.$$

Отсюда находим

$$\sigma_{\min} = \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{3}S_{ABC}.$$

(В условии этой задачи, опубликованной в №1, в формуле была допущена опечатка. Наше решение относится к случаю, когда треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ ориентированы одинаково (против часовой стрелки). Но оно проходит без изменений и для случаев, когда ориентации различны; при этом в ответ площадь S_{ABC} будет входить с противоположным знаком (т.е. значение $\sigma_{\min}$ будет при этом больше.)

В.Быковский, Н.Васильев

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ Ф1388 – Ф1397

***Ф1388.** Гладкая проволока изогнута в горизонтальной плоскости в форме параболы $y = ax^2$ (см. рисунок). По проволоке с постоянной по величине скоростью v_0 скользит бусинка массой m. С какой силой бусинка действует на проволоку в вершине параболы?*

Когда бусинка проходит вершину параболы, ее скорость направлена точно по оси X. Для очень малого промежутка времени Δt после прохождения вершины смещение вдоль оси X можно считать равным

$$x = v_0 \Delta t .$$

Тогда для смещения вдоль оси Y получаем

$$y = ax^2 = a v_0^2 \Delta t^2 .$$

С другой стороны, при равноускоренном движении с ускорением a_y это же смещение можно записать в виде

$$y = a_y \Delta t^2 / 2 .$$

Отсюда следует, что ускорение бусинки вдоль оси Y равно

$$a_y = 2a v_0^2 ,$$

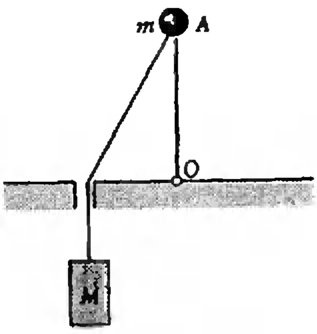
а сила, действующая на нее со стороны проволоки вдоль Y, равна

$$F = m a_y = 2ma v_0^2 .$$

Такая же сила будет действовать со стороны движущейся бусинки на проволоку в вершине параболы, но направлена она будет в противоположную сторону.

З.Рафаилов

***Ф1389.** Невесомый стержень OA длиной L с грузиком массой m на конце может вращаться без трения вокруг точки O, расположенной на поверхности стола (см. рисунок). Другой грузик — массой M — прикреплен к первому при помощи нерастяжимой нити, пропущенной через отверстие в столе на расстоянии L/2 от точки O. В начальный момент стержень приводят в вертикальное положение и отпускают без начальной скорости. Найдите скорость грузика массой m перед ударом его о стол.*



Воспользуемся законом сохранения энергии. Обозначим скорость конца стержня с грузиком массой m перед ударом v. Скорость грузика на нити в этот момент равна нулю (он занимает самое нижнее положение). Грузик массой m опустился от начального положения на L, а грузик массой M — на $L\sqrt{5}/2 - L/2$.

Таким образом,

$$\frac{mv^2}{2} = mgL + \frac{MgL\left(\sqrt{5}-1\right)}{2} .$$

Отсюда

$$v = \sqrt{2gL\left(1 + \frac{M\left(\sqrt{5}-1\right)}{2m}\right)} .$$

Г.Коткин

Ф1390. *В объеме V_0 при температуре T_0 и давлении p находился воздух, содержащий некоторое количество озона O_3. После долгого выдерживания в тени озон полностью превратился в молекулярный кислород. При том же давлении температура воздуха стала T, объем — V. Найдите начальное число молей озона.*

Обозначим количество молей кислорода в объеме V_0 через ν_1, число молей озона — ν_2. После того как озон полностью превратится в кислород, общее количество молекул увеличится и теперь полное число молей кислорода составит $\nu_1 + 1,5\nu_2$.

Запишем уравнения для начального и конечного состояний газа:

$$pV_0 = (\nu_1 + \nu_2)RT_0,$$

$$pV = (\nu_1 + 1,5\nu_2)RT.$$

Теперь легко получить ответ:

$$\nu_2 = 2\frac{p}{R}\left(\frac{V}{T} - \frac{V_0}{T_0}\right).$$

И.Воробьев

Ф1391. *П-образная рамка с равными сторонами, сделанная из тонкой проволоки, свободно висит на шарнирном соединении в вертикальном магнитном поле $\vec{B}$ (рис. 1). На какой максимальный угол отбросит рамку, если по ней пропустить постоянный ток силой I? Масса единицы длины проволоки ρ.*

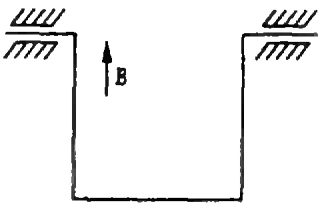


Рисунок 1

Центр тяжести рамки расположен на расстоянии $2L/3$ от оси вращения (рис. 2). Сила Ампера действует на каждый из проводников, но только сила, приложенная к нижнему проводнику, поворачивает рамку (остальные стремятся ее деформировать). Пусть угол отброса составляет α, тогда центр тяжести поднимется на величину $2L(1-\cos\alpha)/3$. Магнитная сила IBL на горизонтальном перемещении $L\sin\alpha$ совершает работу $IBL^2\sin\alpha$. Эта работа и равна приращению потенциальной энергии рамки:

$$2\rho L^2 g(1-\cos\alpha) = IBL^2\sin\alpha.$$

Отсюда найдем угол отброса (придется немного заняться тригонометрией и вспомнить формулы для функций половинного угла):

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\rho g}{IB},$$

$$\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{IB}{2\rho g}.$$

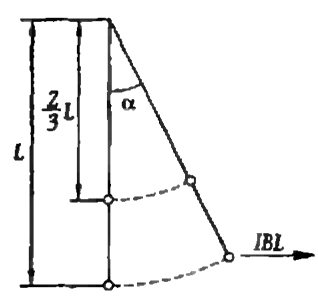


Рисунок 2

А.Киприянов

Ф1392. *Электрический прибор подключен к сети напряжением 220 В последовательно с резистором сопротивлением 100 Ом (рис. 1). Амперметр показывает ток 0,5 А, вольтметр — напряжение 200 В. Какую среднюю мощность*

Сдвиг фаз между током в цепи и напряжением на резисторе равен нулю, поэтому сразу находим, что напряжение на резисторе составляет 50 В (это действующее значение напряжения, амплитудное составит $50\sqrt{2}$ В). Обозначим сдвиг фаз между током и напряжением на приборе φ. Тогда можно найти сумму напряжений на резисторе и приборе (рис.2) и приравнять ее к напряжению сети (сделаем это для действующих значений — можно было бы записать и для амплитудных):

$$200^2 + 50^2 + 2\cdot 200\cdot 50\cos\varphi = 220^2,$$

потребляет прибор от сети? Чему равно «пиковое» значение потребляемой всей схемой мощности?

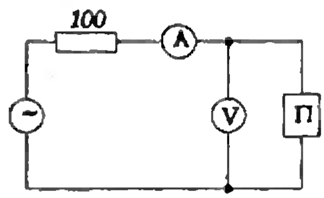


Рисунок 1

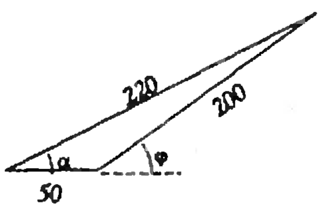


Рисунок 2

откуда получаем сдвиг фаз —

$\cos\varphi = 59/200 \approx 0{,}3$

и среднюю мощность потребления прибора —

$P_{ср} = UI\cos\varphi = 200В \cdot 0{,}5А \cdot 0{,}3 = 30Вт$.

Мгновенное значение мощности сети можно записать в виде

$p = U_0\cos\omega t \cdot I_0\cos(\omega t + \alpha) =$

$= U_0 I_0\left(\cos(2\omega t + \alpha) + \cos\alpha\right)/2$.

Угол α можно найти из того же треугольника на рисунке 2:

$\dfrac{200}{\sin\alpha} = \dfrac{220}{\sin\varphi}$, откуда $\cos\alpha = 0{,}5$.

Максимальное значение выражения в скобках для мгновенной мощности равно $1 + \cos\alpha$, поэтому максимальная мощность потребления от сети составит

$P_{max} = 220В \cdot 0{,}5А \cdot 1{,}5 = 165Вт$.

А.Зильберман

Ф1393. *Оцените минимальный размер округлого астероида, который не сможет покинуть космонавт, подпрыгнув изо всех сил.*

В таких задачах, их называют задачами-оценками, вовсе нет «самого правильного ответа» — тут важен путь решения. При этом некоторые данные приходится задавать самостоятельно и оценивать их величины, исходя из знакомых нам явлений.

Итак, с какой примерно скоростью может оторваться от поверхности астероида космонавт? Мы знаем, что человек может без особого труда подпрыгнуть на высоту $h \sim 1$ м (можно и повыше, но без скафандра — и вообще, космонавт не кузнечик, его не в прыжках тренируют). Это соответствует скорости отрыва от поверхности

$v_0 = \sqrt{2gh} = 4{,}5$ м/с.

Будем считать, что плотность астероида равна средней плотности Земли ρ. Тогда при радиусе астероида r ускорение свободного падения на его поверхности составит

$g_а = G\,M_а/r^2 = 4\pi G\rho\, r/3$.

Аналогично для Земли, радиус которой $R = 6400$ км, —

$g = 4\pi G\rho\, R/3$.

Так называемая вторая космическая скорость, т.е. минимальная скорость, необходимая для покидания астероида, записывается просто:

$v_{II} = \sqrt{2g_а r} = \sqrt{8\pi G\rho\, r^2/3} =$

$= \sqrt{2g\,r^2/R} = r\sqrt{2g/R}$.

Приравняем эту величину к скорости при прыжке и получим оценку для радиуса астероида:

$$r = \sqrt{Rh} = 2,5 \text{ км}.$$

Это вполне подходящее для астероида число. Видно, что оно не сильно изменилось бы при задании другой высоты прыжка.

Г.Меледин

Ф1394. *Наливая в стакан молоко, вы пролили часть его на клеенку и обнаружили, что под слоем молока еле заметен рисунок клеенки. Полагая, что молоко представляет собой взвесь маленьких шариков жира в воде, оцените размер этих шариков.*

Эта задача также требует только оценки.

Пусть шарики жира в молоке имеют одинаковые размеры, распределены равномерно по объему жидкости, а количество их мы определим, вспомнив про «жирность» молока — она бывает от 1% до 6%. Выберем величину 3% и, поскольку плотность жира не очень сильно отличается от плотности воды, будем считать, что жир составляет 3% общего объема.

Итак, обозначим радиус шарика r, а толщину слоя пролитой жидкости h. Тогда число шариков N, которое содержится в лужице площадью S, можно найти из соотношения

$$4\pi r^3 N/3 = 0,03Sh.$$

Своим поперечным сечением шарики полностью перекрывают площадь лужицы, а если учесть, что из-за хаотичности распределения шариков по объему они частично перекрываются между собой, можно брать удвоенную площадь лужицы — впрочем, это не сильно изменит результат:

$$\pi r^2 N = 2S.$$

Поделив второе соотношение на первое, получим оценку для радиуса шарика:

$$r = 0,01h.$$

Толщину слоя можно оценить, используя известное значение коэффициента поверхностного натяжения воды, однако для грубой оценки подойдет величина, которую все мы хорошо знаем из опытов: 1—2 мм. Таким образом, радиус шарика жира в молоке составляет примерно 0,01 — 0,02 мм.

П.Зубков

Ф1395. *На расстоянии R от заряда +Q расположен шарик массой M, на котором сосредоточен заряд −Q. Система помещена в однородное*

Сила, действующая на шарик со стороны магнитного поля, не изменяет кинетической энергии шарика, поэтому изменение его энергии равно работе электростатических сил:

$$Mv^2/2 = -kQ^2/R + kQ^2/(R/2),$$

где v — скорость шарика на минимальном расстоянии от *магнитное поле, линии магнитной индукции которого перпендикулярны отрезку, соединяющему заряды. После того как шарик отпустили, он начал двигаться, причем минимальное расстояние между ним и неподвижным зарядом составило $R/2$. Определите величину индукции магнитного поля.*

неподвижного заряда.

Рассмотрим моменты сил, действующих на шарик, относительно точки, в которой расположен неподвижный заряд. Ясно, что сила электростатического притяжения момента не создает и изменение момента импульса шарика связано с действием магнитного поля. Пусть в некоторый промежуточный момент угол между направлением скорости шарика и направлением на неподвижный заряд составляет α. Обозначим расстояние между зарядами в этот момент r. Тогда момент силы Лоренца будет равен

$$QvBr\cos\alpha = QBr(v\cos\alpha) = QBr\,\Delta r/\Delta t.$$

Изменение момента импульса L движущегося заряда определяется величиной момента силы (аналогично тому, как изменение импульса тела определяется величиной действующей силы):

$$\Delta L/\Delta t = QBr\,\Delta r/\Delta t.$$

Суммируя изменения момента импульса, можно записать

$$L = MvR/2 = QB\sum_i r_i\Delta r_i = QB\left(R^2 - R^2/4\right)/2.$$

Подставляя выражение для v из уравнения энергии, получаем окончательно

$$B = \sqrt{32kM/\left(9R^3\right)}.$$

Д.Островский

Ф1396. *Какой ток покажет амперметр в цепи, изображенной на рисунке 1, если число витков во вторичной обмотке трансформатора в два раза больше, чем в первичной? Считайте, что обмотки содержат очень много витков и намотаны на тороидальный сердечник из материала с большой магнитной проницаемостью. Рассеяние магнитного потока пренебрежимо мало, сопротивление обмоток постоянному току равно нулю. Амперметр — идеальный.*

Упростим немного схему, которую собираемся рассчитывать (рис. 2): по проводнику bb^*, соединяющему нижние выводы катушек трансформатора, ток не течет, и проводник можно удалить. Теперь параллельно вторичной обмотке трансформатора подключен конденсатор емкостью C (сопротивление амперметра равно нулю), и трансформатор вместе с этим подключенным конденсатором можно заменить эквивалентным конденсатором емкостью $4C$. Действительно, напряжение на конденсаторе, включенном во вторичную обмотку, окажется в 2 раза больше, чем на первичной обмотке транформатора (уравнение для идеального трансформатора), а ток первичной обмотки будет в 2 раза больше тока, протекающего по вторичной обмотке, т.е. по подключенному к ней конденсатору (то же уравнение) — при сохранении всех фазовых соотношений, которые характерны для конденсаторов. Отсюда и следует, что можно произвести замену на эквивалентный конденсатор, емкостное сопротивление которого в 4 раза меньше — т.е. на конденсатор емкостью $4C$. Теперь все совсем просто: напряжение на эквивалентном конденсаторе составляет $1/5$ на-

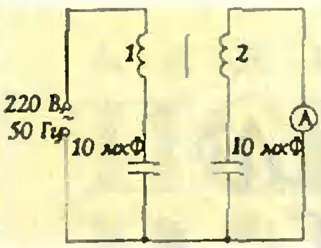


Рисунок 1

пряжения сети. Перейдем опять к схеме с трансформатором и найдем ток через амперметр:

$I = 0,4\,U/X_C = 0,4U\omega C = 0,28$ А.

Заметим, что замена эквивалентным конденсатором возможна только в том случае, когда индуктивности обмоток транформатора велики. Если это не так, то расчет сильно усложняется.

З.Рафаилов

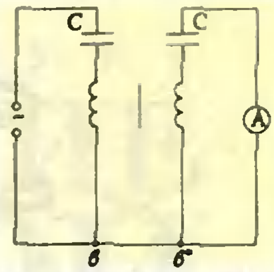


Рисунок 2

Ф1397. *Цилиндр радиусом $R = 5$ см составлен из двух одинаковых полуцилиндров, изготовленных из стекла с коэффициентом преломления $n = 2$. Полуцилиндры соприкасаются своими плоскими поверхностями. Не отрывая плоскостей друг от друга, один из полуцилиндров поворачивают так, что угол между осевыми линиями половинок составляет 90°. Тонкий параллельный световой пучок направляют снаружи на выпуклую поверхность одного из полуцилиндров перпендикулярно плоскости соприкосновения половинок, причем продолжение пучка проходит через точку пересечения осей. Каким будет пучок на выходе из стекла? Во сколько раз увеличится его площадь поперечного сечения на расстоянии $l = 1$ м от системы?*

Преломление удобно рассматривать для двух взаимно перпендикулярных плоскостей (углы мы будем рисовать большие — для наглядности, но считать их будем малыми и заменять всюду значения синусов значениями самих углов).

Итак, для луча, который упал так, как показано на рисунке 1, угол преломления в два раза меньше угла падения φ и преломленный луч пересекает главную ось как раз на границе стекло—воздух. При этом вышедший луч снова составит с осью угол φ. На расстоянии l от системы он отклонится на $\varphi\, l$ от оси. Для луча, который преломляется так, как показано на рисунке 2, на входе преломления не будет, а на выходе из стекла в воздух луч составит угол φ с осью. Отклонение от оси на расстоянии l будет равно $\varphi\, l$ (мы учли, что $l \gg R$).

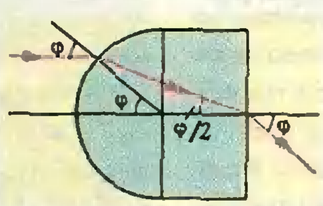


Рисунок 1

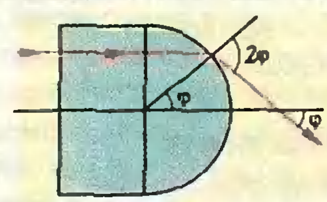


Рисунок 2

Считая пятно эллипсом, найдем отношение его площадей вблизи системы и на удалении от нее:

$S_1 : S_2 = R^2 : l^2 = 1 : 400$.

Видно, что непосредственно на выходе из системы пучок становится совсем сплющенным, а потом превращается в обычный, расходящийся конусом, пучок.

А.Зильберман

Задачи

1/Порция мороженого. Войдя в парк, Захар купил порцию мороженого и отправился на аттракционы. Через час он вернулся к киоску, чтобы купить еще порцию, и обнаружил, что она подорожала в 1,75 раза, при этом продавец лишь переставил цифры на ценнике. Обе порции обошлись Захару в 99 рублей. Сколько стоила первая порция мороженого?

Захар Каблучко, 6 класс

2/Муравей на кубе. Муравей ползет по ребрам куба, поворачивая лишь в вершинах. Может ли случиться так, что в одной из вершин он побывает 25 раз, а в каждой из остальных — по 20?

С.Токарев

3/Физико-математический ребус. Замените буквы цифрами так, чтобы выполнялись указанные равенства. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

И.Акулич

4/Стая обезьян.

Обезьян резвилась стая.
На деревьях часть восьмая,
Возведенная в квадрат,
И шестнадцать на лужайке.
Сосчитай животных в стайке
И скажи нам результат.

В.Копп, по мотивам индийского эпоса

5/Параллельные стороны. Все углы 19-угольника кратны 10°. Докажите, что у него найдутся две параллельные стороны.

В.Произволов

АНДРЕЙ КОРЖУЕВ

ИСПАРЕНИЕ В ЖИВОЙ ПРИРОДЕ

Как вы, конечно же, знаете, процесс испарения состоит в том, что наиболее быстрые молекулы, оказавшись вблизи поверхности жидкости, могут преодолеть притяжение ближайших соседних молекул и покинуть жидкость. Понятно, что скорость испарения зависит от многих факторов — от рода жидкости, от ее температуры и площади поверхности, от того, в закрытом или открытом сосуде находится жидкость, и так далее. При этом чем интенсивнее происходит испарение, тем сильнее охлаждается жидкость — ведь из нее уходят самые энергичные молекулы.

Процесс испарения очень распространен в природе и играет большую роль в жизни животного и растительного мира. Рассмотрим несколько примеров и попытаемся объяснить их.

Как известно, при наступлении засухи листья у многих растений скручиваются. В чем причина? Очевидно, все дело в том, что из-за недостатка воды в почве при засухе уменьшается поступление влаги через корни и, чтобы уменьшить испарение ее листьями, растение как бы свертывает их, уменьшая тем самым площадь поверхности испарения. По этой же причине у многих растений пустыни нет листьев, а вместо них — лишь некрасивые колючки и шипы. Так растения берегут живительную влагу.

Мы рассмотрели пример уменьшения скорости испарения. Если же необходимо ее увеличить, нужно сделать площадь поверхности испарения как можно большей. Так мы и поступаем, например, переливая горячий чай из чашки в блюдце, разрезая на части картофель, яблоки и другие овощи и фрукты, предназначенные для сушки.

Еще одним фактором, влияющим на скорость испарения, является движение воздуха над поверхностью жидкости или попросту ветер. Так, желая быстрее остудить чай, мы создаем искусственный ветер — дуем на поверхность воды. По этой же причине скошенная трава на лугу высыхает быстрее, чем в лесу (справедливости ради надо отметить, что на испарение в данном случае влияет также и солнечное тепло, которое в лесу с огромным трудом достигает травы, а в поле с успехом увели-

чивает испарение). И наоборот, у многих растений пустыни листья покрыты маленькими густыми волосками, которые препятствуют интенсивному движению воздуха вблизи поверхности листьев и замедляют процесс испарения.

Вспомним еще одно интересное явление — усиление запаха цветов после дождя. Чтобы его объяснить, напомним, что запах вызывают пахучие эфирные масла, образующиеся в нектарниках. Безводные эфирные масла испаряются гораздо менее интенсивно, чем их смесь с водой, капельки которой во время дождя в большом количестве попадают в чашечки цветов, а оттуда в нектарники. Сильное испарение получившейся смеси и усиливает запах цветов.

Как уже говорилось, температура тела, с поверхности которого происходит испарение влаги, уменьшается. Так, если сорвать с дерева лист и приложить его к лицу, можно почувствовать приятный холодок. Причина — интенсивное испарение влаги с листа.

Такой же эффект мы наблюдаем и после купания — если мы не сразу возьмем полотенце, то даже в жаркую погоду можем замерзнуть.

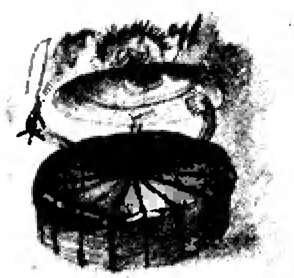
А задумывались ли вы когда-нибудь над тем, какую температуру воздуха способен переносить человек? Оказывается, проводились специальные опыты, в результате которых выяснилось, что при постепенном нагревании сухого воздуха человек способен вынести температуру до 160 °С. Чем же объяснить такую выносливость? Ведь изменение температуры тела даже на 1 °С очень болезненно ощущается человеком. Дело в том, что на самом деле температура тела меняется очень незначительно. И вот почему. Организм противодействует нагреванию, обильно выделяя пот. Испарение пота требует большого количества теплоты, которое поглощается из того слоя воздуха, который непосредственно прилегает к коже. Выделив это количество теплоты, сам слой остывает. Однако воздух должен быть при этом достаточно сухим. Если в нем много влаги, процесс испарения будет идти очень медленно и окажется не в состоянии обеспечить человеку такую выносливость. И потому «влажная жара», например, в Ленинграде переносится порой гораздо труднее, чем «сухая жара», к примеру, в Средней Азии.

Гораздо хуже приспособлен к жаре организм собаки: у нее потовые железы расположены только на подушечках и потому в жару она часто широко открывает рот и высовывает язык — испарение слюны немного понижает температуру ее тела. Правда, существуют и другие механизмы отвода тепла, связанные с теплопроводностью, — собаки могут вытянуть конечности, открыть части тела, покрытые редкой шерстью.

В заключение поговорим о том, почему в безветренную погоду мороз переносится легче, чем при сильном ветре. Ощущение холода обусловлено тем, что от лица, в частности, отнимается гораздо большее количество теплоты, так как нагретый телом воздух быстро сменяется новой порцией холодного воздуха, который опять отнимает тепло. И чем сильнее ветер, тем быстрее происходит эта смена. Однако и тут замешано испарение. Ведь с поверхности нашей кожи влага испаряется даже в холодную погоду. Если ветра нет, испарение происходит медленно, потому что слой воздуха, находящийся вблизи кожи, постепенно насыщается парами. Если же есть движение воздуха (при ветре или когда мы сами его создаем при быстрой ходьбе), то все новые и новые его порции соприкасаются с кожей и происходит интенсивное испарение, которое, как мы знаем, и ведет к охлаждению. Так что в ветреную погоду лучше оставайтесь дома!

МАТЕМАТИКА

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач для учащихся 6 — 8 классов. Конкурс состоит из 20 задач и заканчивается в апреле. Победители будут награждены премиями журнала «Квант» и Российского благотворительного фонда «Интеллект». Решения задач из этого номера высылайте не позднее 1 марта 1994 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, класс.



6. Через некоторое время после распада Зюйдвестской империи на 16 независимых княжеств оказалось, что каждое княжество дружит ровно с тремя другими княжествами и враждует с остальными. Восемь соседних государств решили оказать материальную помощь всем княжествам распавшейся империи, каждое — двум дружественным княжествам. Можно ли гарантировать, что такую помощь удастся организовать?

С.Токарев

7. Для каких натуральных чисел n и m справедливо соотношение

$$\frac{2}{1993}=\frac{1}{n}+\frac{1}{m}?$$

С.Дворянинов

8. На доске 1×100 на клетке № 50 стоит фишка. Играют двое, каждый может своим ходом передвинуть фишку на одну или две клетки в ту или иную сторону. Запрещается ставить фишку на те клетки, на которых она уже побывала. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнер?

А.Савин

9. Существует ли число, оканчивающееся на 11, которое делится на 11 и имеет сумму цифр, равную 11?

И.Акулич

10. Биссектриса, медиана и высота, проведенные из вершин A, B и C треугольника ABC, пересекаются в точке O. Докажите, что если AB — наибольшая сторона треугольника, то $BO > AO$, а если наименьшая, то $BO < AO$.

С.Азлецкий

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА

6 МАТЕМАТИКА 8

Дорогие читатели — участники конкурса «Математика 6—8»!

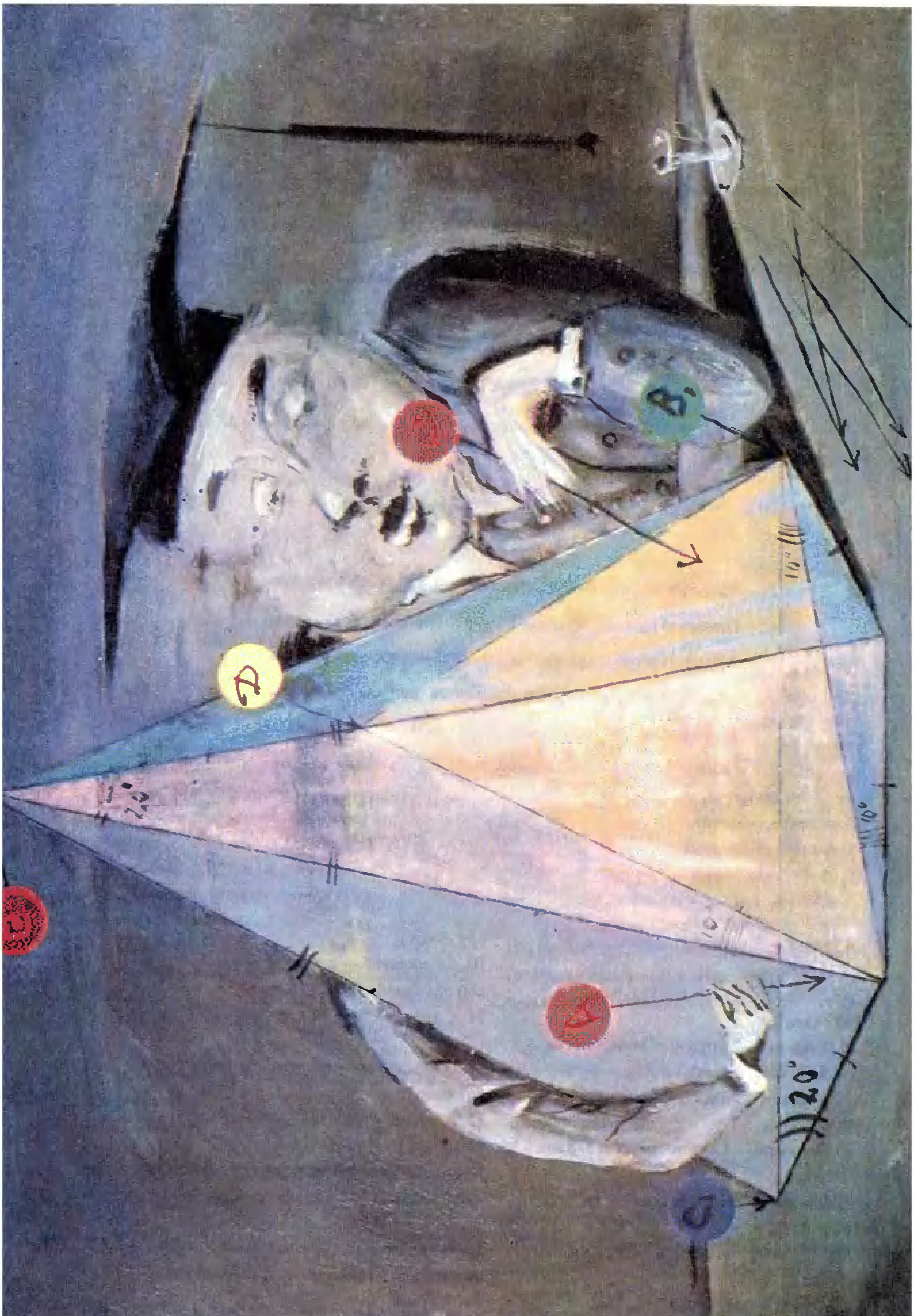
Перебои с выходом журнала в 1993 году сильно повлияли на проведение этого конкурса, так как восьмиклассники перешли в девятый класс, не дождавшись номеров журнала с задачами 13—24. Поэтому редакция решила определить победителей конкурса отдельно по задачам 1—12 и по задачам 13—24.

Победители получают призы журнала и Всероссийского благотворительного фонда «Интеллект».

1. *А.Гуляев* — Нижний Новгород, сш 82, 8 кл. (112 очков),
2. *А.Туровский* — Баку, сш 151, 8 кл. (109 очков),
3. *И.Петренко* — Дружный Минской обл., сш 1, 5 кл. (106 очков),
4. *А.Кудинов* — Минск, сш 64, 7 кл. (106 очков),
5. *Ю.Санников* — Севастополь, сш 8, 8 кл. (101 очко),
6. *А.Мельник* — Гайворон, сш 2, 8 кл. (100 очков),
7. *А.Дымарский* — Луганск, сш 1, 7 кл. (92 очка),
8. *С.Дюжев* — Москва, сш 144, 7 кл. (91 очко),
9. *Е.Куликова* — Петропавловск, сш 3, 6 кл. (79 очков),
10. *К.Сошников* — п.Черноголовка Московской обл., сш 82, 7 кл. (73 очка),
11. *С.Лимаренко* — Москва, сш 444, 7 кл. (70 очков),
12. *О.Карпенков* — Москва, сш 444, 7 кл. (61 очко),
13. *А.Мощук* — Москва, сш 444, 6 кл. (60 очков).

Кроме того, за активное участие в конкурсе награждаются:

Математический кружок 8 класса лицея-интерната (Чебоксары), руководитель С.А.Иванов,
математический кружок сш 51 (Киев), руководитель Б.Н.Школьник.


20°
10°

КОНСТАНТИН КНОП

ИСТОРИЯ С ГЕОМЕТРИЕЙ, *или* ДЕВЯТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ

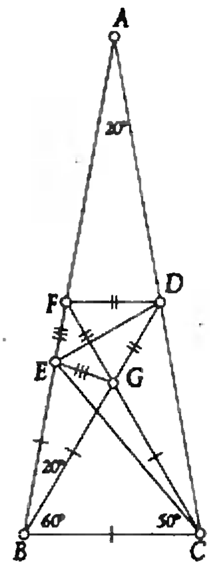


Рисунок 1

Задача, различные решения которой мы будем разбирать, обошла многие сборники геометрических задач. При всей простоте условия решить ее очень трудно. Она интересна и тем, что решение, приведенное во многих книгах, далеко не лучшее из возможных. Впрочем, по порядку. Вот она, эта задача:

В равнобедренном треугольнике ABC угол BAC равен 20° и AC=AB. На сторонах AC и AB взяты точки D и E соответственно так, что угол ECB равен 50°, а угол DBC равен 60°. Найдите величину угла EDB.

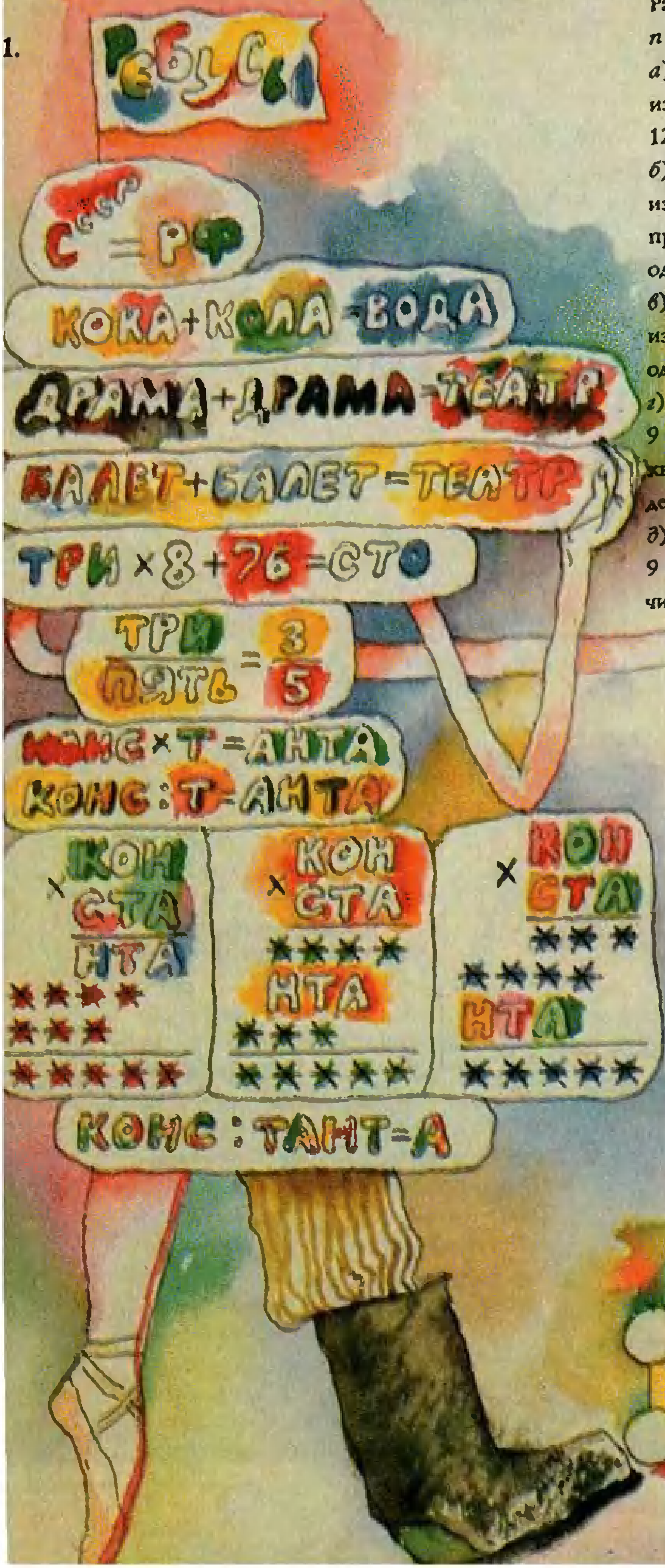
Первое решение. Прежде чем вы будете читать дальше, попробуйте решить самостоятельно. Не пожалейте нескольких часов (а может быть, минут). Вы получите истинное удовольствие, если найдете ответ...

Пусть отрезок *DF* (рис.1), параллельный отрезку *BC*, пересекает отрезок *AB* в точке *F*, а отрезок *CF* пересекает *BD* в точке *G*. Так как треугольник *BCG* правильный, то *BG* = *BC*. Так как треугольник *CBE* равнобедренный, то *BE*=*BC*. Значит, треугольник *BEG* равнобедренный, угол *BGE* равен 80°, угол *FGE* равен 40°. Так как и угол *EFG* равен 40°, треугольник *EFG* тоже равнобедренный и *FE* = *GE*. Но *DF* = *DG*, и, следовательно, треугольники *FDE* и *GDE* равны, прямая *DE* делит угол *FDG* пополам, т.е. угол *EDB* равен 30°.

Итак, в решении используются две дополнительно построенные точки и при этом рассматриваются 5 треугольников. В общем, конечно, такое решение нельзя назвать ни сложным, ни громоздким, но и никакого ощущения изящества и красоты оно не оставляет. Поэтому, когда после долгих раздумий и безуспешных попыток

Каникулярный Калейдоскоп

1.



2. Расстановки чисел

Расставьте в кружочках числа от 1 до n так, чтобы:

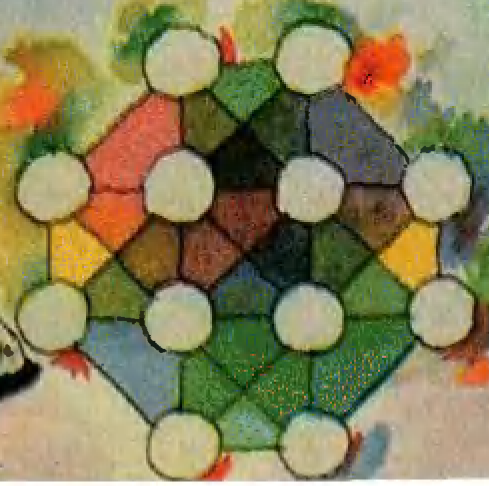
а) суммы чисел в вершинах каждого из 9 квадратов была одинакова ($n = 12$);

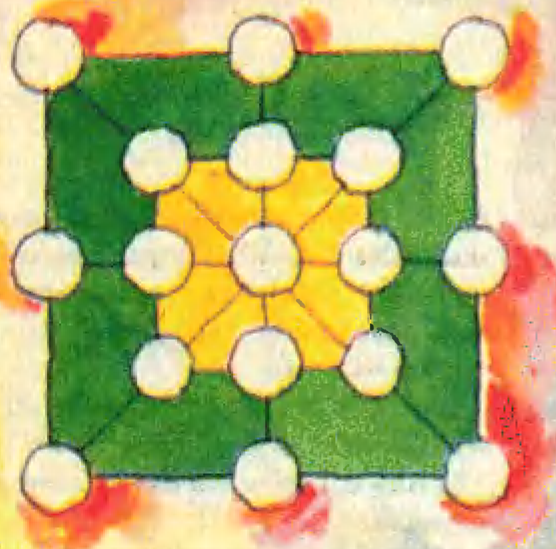
б) суммы чисел на сторонах каждого из двух квадратов и на прямых, проходящих через их центр, были одинаковы ($n = =17$);

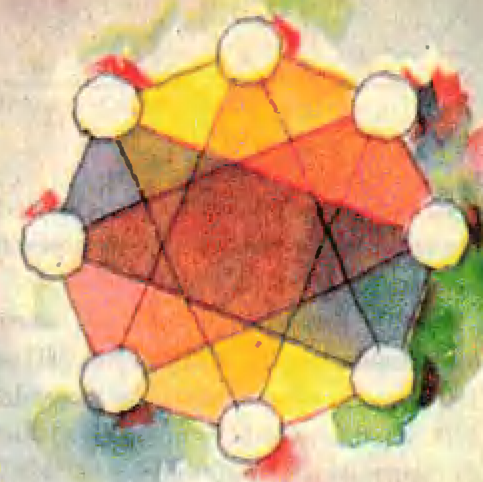
в) суммы чисел на сторонах каждого из четырех прямоугольников были одинаковы ($n= 8$).

г) Расставьте в клетках цифры от 0 до 9 так, чтобы в строчках получились квадраты натуральных чисел, делящихся на 3.

д) Расставьте в клетках цифры от 0 до 9 так, чтобы в строчках получились числа, делящиеся на 97.



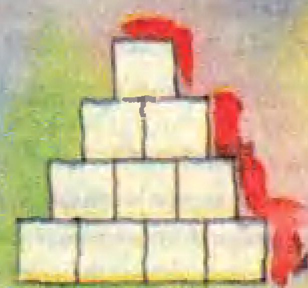




3. Задачи с косточками домино

а) Приставляя косточки домино по правилам домино, сложите фигуру, показанную на рисунке, так чтобы сумма очков в каждом из пяти квадратов была одна и та же.

б) Сложите из комплекта домино пирамиду так, чтобы сумма очков в каждом квадрате была равна 12.

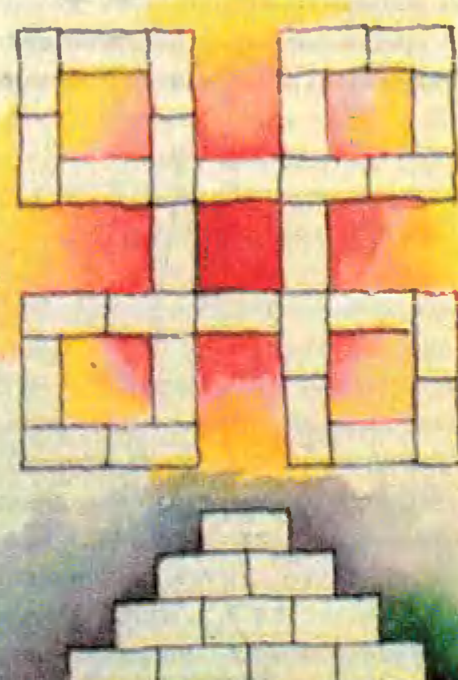


Можно ли из полного комплекта домино сложить:

в) два неравных, *но подобных* прямоугольника?

г) два неравных, но подобных параллелепипеда?

д) и то, и другое одновременно?



Задачи для нашего «Калейдоскопа» предложили

Н.Авилов, И.Акулич, Н.Антонович, С.Баженов, П.Филевич, А.Савин

отыскал другое решение, я был очень рад. Огорчало меня только одно: это решение не было геометрическим.

Второе решение. Пусть x — величина неизвестного угла EDB. Тогда угол BED равен $160° - x$. По теореме синусов из треугольника BED находим $BE:BD = \sin(160°-x):\sin x$, а из треугольника BCD получаем $BD:BC = BD:BC = \sin 80°:\sin 40° = 2\cos 40°$. Так как треугольник BEC равнобедренный, то $BE = BC$. Теперь составим и решим тригонометрическое уравнение:

$$\sin(160°-x):\sin x = 2\cos 40° \Rightarrow$$

$$\sin(20°+x) = 2\cos 40° \sin x =$$

$$= 2\cos(60°-20°)\sin x \Rightarrow$$

$$\sin 20° \cos x + \cos 20° \sin x =$$

$$= \left(\cos 20° + \sqrt{3}\sin 20°\right)\sin x \Rightarrow$$

$$\sin 20° \cos x = \sqrt{3}\sin 20° \sin x \Rightarrow$$

$$\operatorname{ctg} x = \sqrt{3};\ x = 30°.$$

Тригонометрия — сильнейшая палочка-выручалочка. Но неужели эта задача не имеет другого геометрического решения? К счастью, имеет, и не одно. Два следующих я нашел, потратив на это не один час свободного времени.

Третье решение. Достроим треугольник BCD (рис.2) до параллелограмма $BCDH$ (BH параллельно CD, DH параллельно CB). Пусть G — та же точка, что и в решении 1, т. е. третья вершина правильного треугольника BCG. Тогда

1) $CG = CB = BE$;

2) угол GCD равен $80° - 60° = 20° = 100° - 80°$, т. е. равен углу HBE;

3) HB и CD равны как стороны параллелограмма.

Значит, треугольники HBE и DCG равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда угол BHE равен углу CDG, т. е. $40°$, следовательно, и угол DHE равен $40°$, а HE — биссектриса угла H. А так как BE биссектриса угла HBD, то E — точка пересечения биссектрис треугольника BHD, откуда угол EDH равен половине угла BDH, т. е. $30°$.

Решение другое, но оно едва ли проще первого. Все так же есть две дополнительно построенные точки и приходится рассматривать 5 треугольников.

Четвертое решение. Проведем BK (рис.3) под углом $20°$ к основанию BC, K лежит на AC. Так как угол BCK равен $80°$, то и угол BKC равен $180° - 80° - 20° = 80°$, т. е. $BK = BC$. Как и в предыдущих решениях, из треугольника BEC находим, что $BE = BC$. Значит, $BE = BK$ и так как угол KBE равен $60°$, то треугольник EBK — правильный, $EK = BK$. Из треугольника BKD име-

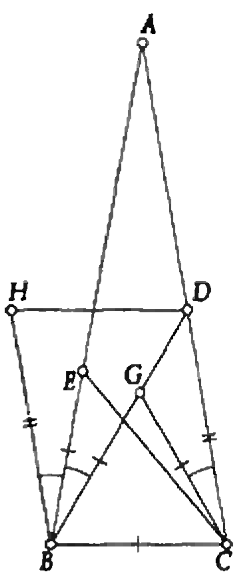


Рисунок 2

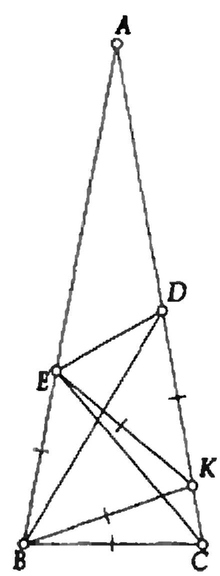


Рисунок 3

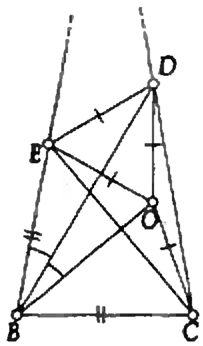


Рисунок 4

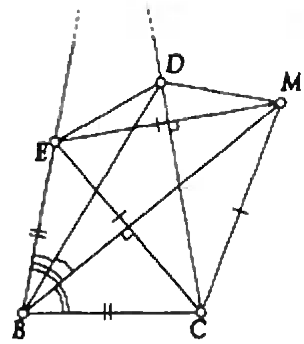


Рисунок 5

ем: угол KBD равен 40°, т.е. равен углу BDK. Значит, $KD = KB$. Поэтому K — центр окружности, описанной около треугольника BED. Угол EDB — вписанный, он равен половине центрального угла EKB, т. е. 30°.

В этом решении вспомогательная точка всего одна и, хотя число рассмотренных треугольников не уменьшилось, все же решение выглядит привлекательнее предыдущих.

Должен сказать, что после того, как эти решения были найдены, меня не покидала навязчивая идея — предложить эту задачу школьникам на какой-нибудь серьезной математической олимпиаде. Авось, отыщут и другие решения! Год назад, совершенно неожиданно для меня, моя мечта осуществилась: эту задачу дали на одном из отборочных туров кандидатам в сборную команду Украины, готовившимся к Международной математической олимпиаде, и моя коллекция решений пополнилась сразу четырьмя новыми.

Пятое решение. (Алексей Бородин, выпускник школы № 17 Донецка, ныне — студент 2 курса МГУ)

Пусть O (рис.4) — центр окружности, описанной около треугольника EDC. Так как вписанный угол ECD равен 30°, то угол EOD равен 60°, откуда находим, что треугольник EOD правильный. Треугольники EOC и EBC равнобедренные, значит, BO — биссектриса угла B. Тогда для треугольников BOD и BED имеем $ED = OD$, угол OBD равен $60° - 40° = 20°$, т.е. равен углу EBD, BD — общая сторона. Значит, эти треугольники равны, т. е. углы EDB и ODB равны половине угла ODE, т. е. 30°.

(Строго говоря, здесь мы опирались на несуществующий признак равенства треугольников «по двум сторонам и углу против одной из них». Такого признака нет и не может быть, так как треугольник с этими данными не единственный. Но для одного из двух возможных треугольников угол между данными сторонами острый, а для другого — тупой. Так как нам дополнительно известно, что каждый из углов BDO и BDE меньше 60°, то можно сделать вывод о равенстве треугольников.)

Шестое решение. (Мария Гельбанд, выпускница школы № 100 Одессы, ныне — второкурсница Одесского университета)

На продолжении биссектрисы угла B (рис.5) за сторону AC возьмем такую точку M, что угол ACM равен 30°. Так как $BC = BE$, то BM — серединный перпендикуляр к EC, т. е. $EM = MC$. В силу выбора точки M угол ECM равен 60°, т. е. треугольник ECM правильный, CD — серединный перпендикуляр к EM. Кроме того, как и в предыдущем решении, BD — биссектриса угла MBE, D — точка пересечения биссектрисы угла и серединного перпендикуляра к стороне. Поэтому D лежит на окружности, описанной около треугольника MBE. Отсюда углы EDB и EMB равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу, т. е. угол EDB равен $60°:2 = 30°$.

Седьмое решение. (Александр Корниенко, выпускник школы № 36 Днепропетровска)

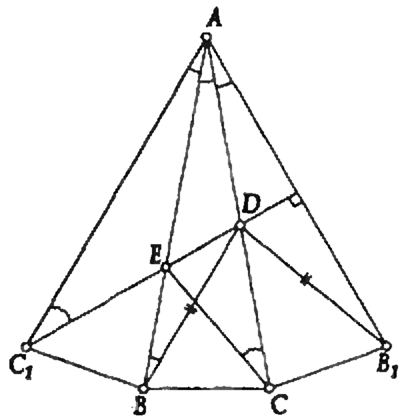


Рисунок 6

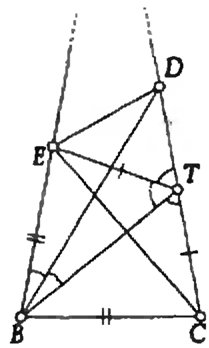


Рисунок 7

Отразим точку C (рис.6) симметрично относительно AB, а точку B — симметрично относительно AC. Получим точки C_1 и B_1. Угол AC_1E равен углу ACE, т. е. 30°, а так как угол C_1AB_1 равен 60° и $AC_1=AB_1$, то C_1E — серединный перпендикуляр к AB_1. Из равенства углов BAC и ABD получим $DA=DB=DB_1$, D также лежит на серединном перпендикуляре к AB_1, т. е. на C_1E. Но тогда угол EDB равен $180^\circ-50^\circ-20^\circ-80^\circ=30^\circ$.

В этом решении — единственном из мне известных — используется точка A. Точнее, здесь используется то, что A — центр правильного 18-угольника, двумя из вершин которого являются точки B и C, а DE в нем оказывается частью одной из диагоналей (попытайтесь представить себе весь 18-угольник).

Восьмое решение. (Сергей Саприкин, ученик 10 класса Ришельевского лицея Одессы, ныне — студент 1 курса ОГУ)

Пусть T (рис.7) — точка пересечения биссектрисы угла B со стороной AC. Тогда угол BTC равен 60°, а так как $BE=BC$, то треугольники BTE и BTC равны, значит, угол BTE равен 60°. Рассмотрим треугольник BTE. Точка D лежит на биссектрисе угла B этого треугольника и на биссектрисе угла, внешнего к углу T. Поэтому она является центром одной из вневписанных окружностей треугольника BTE. Отсюда DE — также биссектриса внешнего угла E. Угол CET равен 30°, следовательно, угол BET равен 80°, угол DET равен $(180^\circ-80^\circ):2=50^\circ$, угол BDE равен $180^\circ-20^\circ-80^\circ-50^\circ=30^\circ$.

Последнюю часть решения — вычисление углов — можно было бы существенно упростить, если использовать такое свойство центра вневписанной окружности: угол EDB равен половине угла ETB, т. е. 30°.

К чему мы пришли? Имеется по меньшей мере восемь существенно различных решений одной задачи. В этих решениях использовано более десятка различных теорем, свойств и соотношений между элементами треугольника, найдены неожиданные способы доказательства равенства углов (например, сделать данную точку центром вневписанной окружности треугольника, одна из вершин которого ищется специально для этого дополнительным построением — см. построение точки T в восьмом решении). Думается, разбор этих решений может стать темой нескольких занятий математического кружка. А где же девятое решение? — спросите Вы. Его предлагается найти Вам.

От редакции. Наш читатель из Черкасс Сергей Юрин — девятиклассник школы № 17 — прислал нам задачу, решить которую мы предлагаем Вам в качестве очень полезного упражнения:

В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=AC$) угол A равен 20°. На стороне AC взята точка D, такая, что $AD=BC$. Найдите угол DBC.

ЗАРЯЖЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

ВИКТОР МОЖАЕВ

Задача 1. *В планетарной модели атома водорода предполагается, что электрон вращается по круговой орбите вокруг небольшого тяжелого положительно заряженного ядра (протона). Определите радиус орбиты электрона, если известно, что минимальная энергия, которую нужно сообщить электрону для удаления его из атома (энергия ионизации), составляет* $W_{ион} = 2,2 \cdot 10^{-18}$ *Дж. Заряды электрона и протона равны* $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ *Кл.*

Будем считать, что электрон движется вокруг неподвижного ядра, масса которого много больше массы m электрона, по окружности радиусом r со скоростью v.

Полная энергия W электрона включает в себя кинетическую энергию его движения и потенциальную энергию электрона в электростатическом поле ядра:

$$W = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}.$$

Знак «минус» во втором слагаемом связан с тем, что за нулевой уровень потенциальной энергии принята бесконечность.

Уравнение движения электрона по круговой орбите имеет вид

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2},$$

поскольку в данном случае стационарность орбиты обеспечивает сила электростатического взаимодействия электрона с протоном.

Выражая значение v^2 из этого уравнения и подставляя его в выражение для полной энергии электрона, получим

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}.$$

Чтобы удалить электрон из атома, ему необходимо сообщить некоторую дополнительную энергию. Она будет минимальной в том случае, если кинетическая энергия электрона на большом удалении от атома равна нулю. Но там его потенциальная энергия также равна нулю, значит, и полная энергия электрона на бесконечности должна быть равна нулю. Тогда из закона сохранения энергии следует, что энергия ионизации равна полной энергии электрона на орбите, взятой с противоположным знаком:

$$W_{\text{ион}} = -W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}.$$

Отсюда находим радиус орбиты электрона:

$$r = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{W_{\text{ион}}} = 5{,}2\cdot 10^{-11}\text{ м}.$$

Заметим, что полной аналогией этой задачи является механическая задача о спутнике, вращающемся по круговой орбите вокруг Земли. Здесь после сообщения спутнику минимальной дополнительной энергии для ухода из зоны притяжения Земли (на бесконечность) он приобретает так называемую вторую космическую скорость.

Задача 2. *Положительно заряженная частица с зарядом q и массой m, имея начальную скорость v_0, влетает под углом α в область однородного электростатического поля между двумя металлическими сетками (плоский конденсатор), на которых поддерживается постоянная разность потенциалов U_0 (рис. 1). Расстояние между сетками равно d. Каким будет дальнейшее движение частицы?*

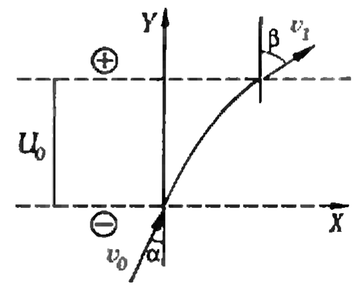


Рисунок 1

Рассмотрим движение частицы в области $0 \le y \le d$ вдоль осей X и Y. По горизонтали никакие силы на частицу не действуют, поэтому ее движение вдоль оси X будет равномерным:

$$x(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t.$$

В вертикальном направлении на частицу действует электрическая сила, равная qU_0/d и направленная вниз. Следовательно, вдоль оси Y частица будет двигаться равнозамедленно:

$$y(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t - \frac{qU_0}{md}\frac{t^2}{2}.$$

Исключая из выражений для $x(y)$ и $y(t)$ время, получим уравнение траектории частицы:

$$y = -\frac{qU_0}{2mv_0^2 d\sin^2\alpha}x^2 + \operatorname{ctg}\alpha \cdot x.$$

Это — уравнение параболы. Значит, в общем случае заряженная частица в однородном электростатическом поле движется по параболе. В частных случаях, когда $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi/2$, парабола переходит в прямые $x = 0$ и $y = 0$ (либо равнозамедленное движение вдоль оси Y, либо равномерное движение вдоль оси X).

В зависимости от величины начальной скорости v_0 и угла α возможны три случая: 1) частица выходит за пределы верхней сетки ($y > d$); 2) частица движется внутри сеток ($y < d$); 3) вершина параболы касается верхней сетки ($y = d$). Обсудим их.

За пределами конденсатора ($y > d$) электрическое поле отсутствует (мы пренебрегаем краевыми эффектами), и частица будет двигаться равномерно и прямолинейно с некоторой новой скоростью, равной v_1 и направленной под углом β к оси Y. Сначала найдем проекцию v_{1y} скорости частицы на ось Y, воспользовавшись законом сохранения энергии. Если у нижней сетки ($y = 0$) полная энергия частицы равна только кинетической энергии $mv_0^2/2 = mv_{0x}^2/2 + mv_{0y}^2/2$ (плоскость $y = 0$ мы принимаем за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии), то у верхней сетки ($y = d$) полная энергия складывается из кинетической $mv_{1x}^2/2 + mv_{1y}^2/2$ и потенциальной qU_0. Из баланса энергий

$$\frac{mv_{0x}^2}{2} + \frac{mv_{0y}^2}{2} = \frac{mv_{1x}^2}{2} + \frac{mv_{1y}^2}{2} + qU_0,$$

учитывая, что $v_{0x} = v_{1x}$, получим

$$v_{1y} = \sqrt{v_{0y}^2 - 2qU_0/m} = v_0\sqrt{\cos^2\alpha - 2qU_0/(mv_0^2)}.$$

Тогда абсолютная величина скорости частицы у верхней сетки будет равна

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{v_0^2 - 2qU_0/m},$$

а синус угла β —

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - 2qU_0/(mv_0^2)}}.$$

Такая ситуация возможна, если подкоренное выражение для v_{1y} больше нуля:

$$\cos^2\alpha - \frac{2qU_0}{mv_0^2} > 0,$$

или

$$\frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2} > qU_0.$$

Во втором случае, когда частица не дойдет до верхней сетки ($1/2\, mv_0^2\cos^2\alpha < qU_0$, т.е. начальной «вертикальной» энергии не хватает для преодоления тормозящего действия электрического поля), она будет двигаться по параболе и вернется к нижней сетке, имея ту же скорость v_0 и под тем же углом α к оси Y (рис. 2). Найдем координаты (x_0, y_0) вершины параболы. Для этого уравнение параболы запишем в виде

$$y = -\frac{y_0}{x_0^2}(x - x_0)^2 + y_0,$$

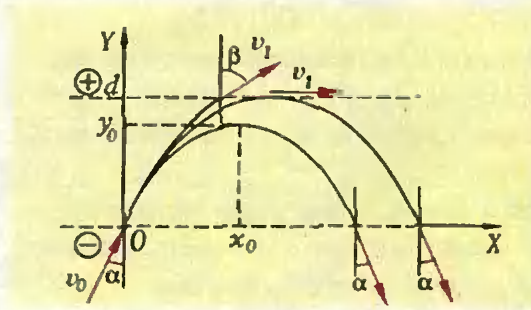


Рисунок 2

откуда получим

$$x_0 = \frac{mv_0^2\sin 2\alpha}{2U_0q}d,$$

$$y_0 = \frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2U_0q}d.$$

И наконец, рассмотрим промежуточный случай, когда скорость v_{1y} частицы при $y = d$ равна нулю ($1/2\, mv_0^2\cos^2\alpha = qU_0$). Используем уже найденные решения. Зафиксируем угол падения α и устремим $1/2\, mv_0^2\cos^2\alpha$ к qU_0. Из формул, полученных при рассмотрении первого случая, следует, что $v_1 \to v_{0x} = v_0\sin\alpha$, а $\sin\beta \to 1$ $(\beta \to \pi/2)$. В пределе мы приходим к тому, что частица движется параллельно сеткам, а ее скорость равна $v_1 = v_0\sin\alpha$ (см. рис. 2).

Теперь сделаем аналогичный предельный переход, рассматривая второй случай. При $1/2\, mv_0^2\cos^2\alpha \to qU_0$ траектория частицы остается параболой, координаты вершины которой $x_0 \to 2d\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $y_0 \to d$.

Мы получили, что при $1/2\, mv_0^2\cos^2\alpha = qU_0$ одновременно возможны два решения. Очевидно, что такое состояние неустойчиво: небольшое нарушение равенства энергий приводит к реализации одного из первых двух случаев.

Обратите внимание на то, как просто можно усмотреть в рассмотренной выше ситуации аналогию между прохождением заряженной частицы через плоский слой однородного электрического поля и преломлением света на границе раздела двух сред. В разобранном примере пространство $y < 0$ является как бы средой с неким

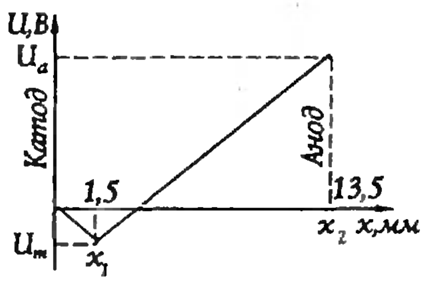


Рисунок 3

«показателем преломления» n_1, а пространство $y > d$ — средой с «показателем преломления» n_2. При использованной полярности приложенной разности потенциалов и положительном заряде частицы вторая среда оказывается менее «плотной» — угол преломления β больше угла падения α $(n_2 < n_1)$. Ситуация, когда $1/2\, mv_0^2 \cos^2\alpha = qU_0$ соответствует случаю, когда при данном угле падения α наступает «полное внутреннее отражение».

Задача 3. *Из-за наличия объемного заряда в межэлектродном пространстве плоского диода устанавливается распределение потенциала, показанное на рисунке 3. Здесь минимальный потенциал $U_m = -2{,}25$ В, напряжение на аноде $U_a = 33{,}75$ В. Какой минимальной энергией должен обладать электрон на выходе из катода, чтобы долететь до анода? Чему равно время пролета электронов с такой энергией? Отношение заряда электрона к его массе $\gamma = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.*

При решении задачи мы должны в первую очередь разобраться с распределением напряженности электрического поля $E(x)$ между катодом и анодом. Для этой цели воспользуемся связью между напряженностью поля и изменением потенциала: $E = -\Delta U/\Delta x$. На участке $0 \le x \le x_1$ (вблизи катода)

$$U(x) = -\frac{|U_m|}{x_1}x.$$

Следовательно,

$$E(x) = \frac{|U_m|}{x_1},$$

и мы имеем участок однородного поля с напряженностью, равной $E_1 = |U_m|/x_1$ и направленной от катода к аноду. Рассмотрим теперь участок $x_1 < x \le x_2$. Здесь распределение потенциала имеет вид

$$U(x) = \frac{U_a - U_m}{x_2 - x_1}x - \frac{U_a x_1 - U_m x_2}{x_2 - x_1},$$

а напряженность поля —

$$E(x) = -\frac{U_a - U_m}{x_2 - x_1}.$$

Таким образом, и на этом участке мы имеем однородное поле с напряженностью, равной $E_2 = -(U_a - U_m)/(x_2 - x_1)$, но направленной уже от анода к катоду. При $x = x_1$ функция $E(x)$ имеет разрыв. Это результат нашего упрощения распределения $U(x)$, в реальной ситуации этого разрыва, конечно, нет.

Теперь мы можем перейти к описанию движения электрона в межэлектродном пространстве диода.

На участке $0 \le x \le x_1$ электрон движется равнозамедленно с ускорением

$$a_1 = -\frac{e|U_m|}{mx_1}.$$

Скорость электрона изменяется по закону

$$v(t) = v_0 - \frac{e|U_m|}{mx_1}t,$$

где v_0 — начальная скорость электрона у поверхности катода. Чтобы долететь до анода, скорость электрона в точке $x = x_1$ должна быть больше или равной нулю (поскольку на участке $x_1 \le x \le x_2$ электрон будет ускоряться). Минимальную энергию такого электрона проще всего найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_{0\min}^2}{2} = e|U_m| = 3{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Время τ_1 пролета участка $0 \le x \le x_1$ в этом случае найдем из условия

$$v_{0\min} - \frac{e|U_m|}{mx_1}\tau_1 = 0,$$

откуда

$$\tau_1 = \frac{mx_1 v_{0\min}}{e|U_m|} = \frac{mx_1\sqrt{2e|U_m|}}{e|U_m|\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{2}x_1}{\sqrt{e|U_m|/m}}.$$

Движение электрона на участке $x_1 \le x \le x_2$ равноускоренное с ускорением

$$a_2 = \frac{e(U_a + |U_m|)}{m(x_2 - x_1)}.$$

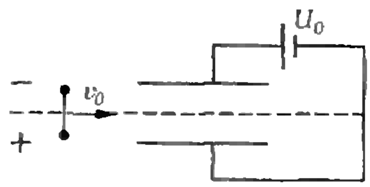


Рисунок 4

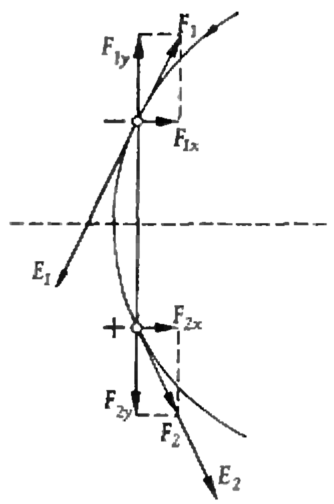


Рисунок 5

Поскольку начальная скорость электрона в точке $x = x_1$ равна нулю, время пролета этого участка

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{2(x_2 - x_1)}{a_2}} = \frac{\sqrt{2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{e(U_a + |U_m|)/m}}.$$

Полное время пролета

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \sqrt{\frac{2}{\gamma}}\left(\frac{x_1}{\sqrt{|U_m|}} + \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{U_a + |U_m|}}\right) = 10^{-8}\text{ с}.$$

Задача 4. *Электрический диполь, представляющий собой два жестко связанных точечных заряда $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии l друг от друга, пролетает плоский конденсатор, между пластинами которого поддерживается постоянная разность потенциалов U_0 (рис. 4). Определите скорость диполя в центре конденсатора, если известно, что его скорость вдали равна v_0. Расстояние между пластинами конденсатора d, масса диполя m.*

Рассмотрим сначала силы, действующие на диполь со стороны электрического поля конденсатора в некоторый произвольный момент времени, когда диполь еще находится вне конденсатора (здесь, в отличие от задачи 2, краевыми эффектами мы не пренебрегаем). На рисунке 5 (в увеличенном масштабе) изображен диполь, через заряды которого проходит одна из силовых линий электрического поля конденсатора. Как видно из рисунка, силы, действующие на заряды диполя ($\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$), зеркально симметричны относительно плоскости симметрии системы. Результирующая сила равна сумме проекций F_{1x} и F_{2x} $(F_{1x} = F_{2x})$ и направлена в сторону конденсатора, т.е. диполь втягивается в конденсатор.

Найти аналитическое выражение для результирующей силы сложно, да и нас интересует только суммарный результат. Поэтому для решения задачи мы воспользуемся энергетическим методом.

На большом удалении от конденсатора полная энергия диполя равна его кинетической энергии:

$$W_1 = \frac{mv_0^2}{2},$$

поскольку потенциальную энергию диполя на бесконечности разумно считать равной нулю. Когда диполь будет находиться в центре конденсатора, его полная энергия

$$W_2 = \frac{mv_к^2}{2} + П,$$

где $v_к$ — скорость диполя, а $П$ — его потенциальная энергия. Таким образом, задача свелась к нахождению потенциальной энергии диполя в центре конденсатора.

Потенциальная энергия диполя — это потенциальная энергия его зарядов. Так как в электростатическом поле потенциальная энергия системы зарядов не зависит от траекторий, по которым они перемещаются, а определяется лишь их взаимным расположением, будем перемещать наши заряды сначала вдоль эквипотенциальной поверхности нулевого потенциала (пунктирная линия на рисунке 4), а в центре конденсатора отрицательный заряд переместим вверх на расстояние $l/2$, положительный — вниз тоже на $l/2$. При перемещении по эквипотенциальной поверхности работа не совершается, при перемещении же в однородном поле с напряженностью $E = U_0/d$ над отрицательным зарядом совершается работа $A_- = -qEl/2 = -qU_0l/(2d)$, а над положительным зарядом — $A_+ = -qU_0l/(2d)$. Суммарная работа и будет численно равна потенциальной энергии диполя:

$$\Pi = A_- + A_+ = -\frac{qU_0l}{d}.$$

Окончательно, записывая баланс энергий диполя

$$W_1 = W_2\text{, или } \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_к^2}{2} - \frac{qU_0l}{d},$$

получим

$$v_к = v_0\sqrt{1 + \frac{2qU_0l}{mv_0^2d}}.$$

Задача 5. *Два закрепленных одинаковых тонких металлических кольца расположены соосно на некотором расстоянии друг от друга (рис. 6). Кольца заряжены одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку зарядами. Для пролета вдоль прямой, проходящей через центры колец перпендикулярно их плоскостям, заряженной частице на большом удалении от колец необходима минимальная скорость v_0. Пусть скорость частицы вдали от колец равна v_1 $(v_1 > v_0)$. Каким будет отношение максимальной скорости частицы к минимальной во время пролета?*

Качественное распределение потенциала $\varphi(r)$ поля заряженных колец вдоль линии движения частицы изображенно на рисунке 7. Начало координат выбрано посередине между кольцами, координата центра положительно заряженного кольца $r_1 = a$, а отрицательного кольца $r_2 = -a$. В данном случае нас не интересует конкретный вид функции $\varphi(r)$, нам важен лишь нечетный характер данной функции: $\varphi(r) = -\varphi(-r)$, а также наличие двух экстремумов: максимума и минимума.

Положительно заряженная частица при пролете справа налево будет тормозиться на участках $r_m < r < \infty$ и $-\infty < r < -r_m$ и ускоряться на участке $-r_m < r < r_m$. Минимальная скорость v_0 частицы, необходимая для пролета колец, определяется условием

$$\frac{mv_0^2}{2} = q\varphi_m,$$

где m — масса частицы, а q — ее заряд. В этом случае в точке $r = r_m$ частица будет иметь нулевую скорость, затем она будет ускоряться и в точке $r = 0$ снова будет иметь скорость v_0. Продолжая ускоряться, при $r = -r_m$ ее скорость будет максимальной и равной $\sqrt{2}v_0$. На участке $-\infty < r < -r_m$ скорость начнет уменьшаться, стремясь к значению v_0 на большом удалении.

Из приведенного рассуждения ясно, что при начальной скорости частицы v_1 она будет иметь минимальную скорость в точке $r = r_m$, а максимальную в точке $r = -r_m$. Обе скорости можно найти из закона со-

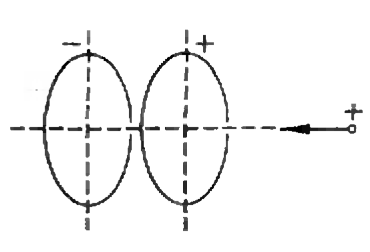


Рисунок 6

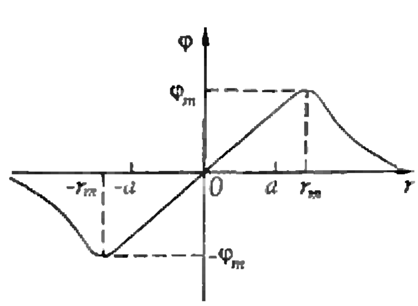


Рисунок 7

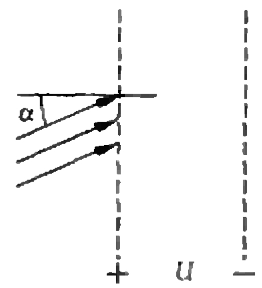


Рисунок 8

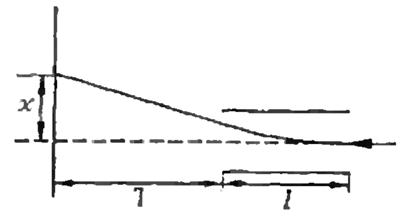


Рисунок 9

хранения энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2}=\frac{mv_{min}^2}{2}+q\varphi_m=\frac{mv_{min}^2}{2}+\frac{mv_0^2}{2},$$

$$\frac{mv_1^2}{2}=\frac{mv_{max}^2}{2}-q\varphi_m=\frac{mv_{max}^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}.$$

Из первого уравнения находим

$$v_{min}=\sqrt{v_1^2-v_0^2},$$

а из второго —

$$v_{max}=\sqrt{v_1^2+v_0^2}.$$

Их отношение равно

$$\frac{v_{max}}{v_{min}}=\frac{\sqrt{1+\left(v_0/v_1\right)^2}}{\sqrt{1-\left(v_0/v_1\right)^2}}.$$

Упражнения

1. На две параллельные сетки, между которыми приложена разность патенциалов U, падают отрицательно заряженные частицы с энергией $4eU/3$ (e — заряд частицы) под разными углами $0\le\alpha\le\pi/2$ (рис. 8). При каких углах падения частицы будут «отражаться», т.е. не смогут пройти через сетки?

2. Электрон, имеющий кинетическую энергию $W=10$ кэВ, влетает в плоский конденсатор (рис. 9), между пластинами которого поддерживается постоянная разность потенциалов $U=40$ В. Расстояние между пластинами $d=1$ см, их длина $l=10$ см. На расстоянии $L=20$ см от конденсатора находится экран. Первоначальная скорость электрона направлена параллельно пластинам. Найдите смещение (x) электрона на экране. Силой тяжести можно пренебречь.

3. В планетарной модели атома водорода электрон вращается по круговой орбите вокруг небольшого тяжелого положительно заряженного ядра (протона). При переходе с одной орбиты на другую, расположенную ближе к ядру, испускается фотон. Какова энергия фотона, испущенного атомом водорода при переходе электрона с орбиты радиусом $r_2=2{,}1\cdot10^{-8}$ см на орбиту радиусом $r_1=5{,}3\cdot10^{-9}$ см?

4. Электрический диполь из двух жестко связанных точечных зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии l друг от друга, находится в положении устойчивого равновесия в однородном электрическом поле с напряженностью E. Какую работу нужно совершить, чтобы повернуть диполь на 180°?

5. Протон с удельным зарядом $q/m=0{,}96\cdot10^8$ Кл/кг налетает на систему из трех плоских металлических сеток, между которыми с помощью двух источников с ЭДС $\mathcal{E}_1=500$ В и $\mathcal{E}_2=200$ В поддерживаются постоянные разности потенциалов (рис. 10). Расстояния между сетками равны d и много меньше поперечных размеров сеток. В точке, находящейся на расстоянии $d/4$ справа от второй сетки, скорость протона оказалась равной нулю. Чему была равна скорость протона на большом удалении от сеток?

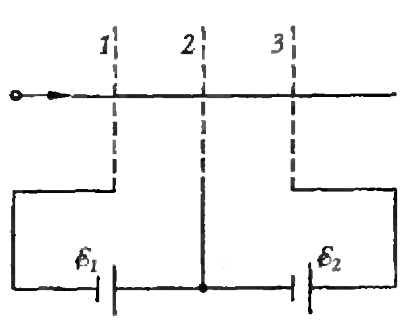


Рисунок 10

XIX Всероссийская олимпиада школьников по математике

Как и в прошлые годы, в дни весенних школьных каникул проходил зональный этап Российской физико-математической и химической олимпиады школьников. На этот раз участников из Северо-Западной России принимал Мурманск, Южной России — Астрахань, Урала и Среднего Поволжья — Пенза, Сибири и Дальнего Востока — Томск. В этом туре участвовали победители предыдущих этапов (областных, краевых, республиканских), победители конкурса «Задачник «Кванта» и призеры Всероссийской и Межреспубликанской олимпиад прошлого года. Заключительный этап олимпиады проводился в Анапе в конце апреля — начале мая. В нем приняли участие 6 команд, составленных из победителей предыдущего этапа, а также победители Межреспубликанской математической олимпиады 1992 года и команды Армении, Китая, Туркменистана и Узбекистана — всего 164 школьника (54 девятиклассника, 51 десятиклассник и 59 одиннадцатиклассников). Предлагаем вашему вниманию условия задач зонального и заключительного этапов олимпиады (некоторые задачи публикуются в рубрике «Задачник «Кванта»).

Зональный этап

9 класс

Первый день

1. Докажите, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство

$$a^2+ab+b^2 \geq 3(a+b-1).$$

Н.Агаханов

2. Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычеркиванием цифр нельзя получить число, делящееся на 11.

Р.Женодаров

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O, причем $AO = CO$. Обязательно ли треугольник ABC равнобедренный, если

а) $AM = CN$;

б) $BM = BN$?

Б.Кукушкин

4. В колоде n карт. Часть из них лежит рубашками вверх, остальные — рубашками вниз. За один ход разрешается взять несколько карт сверху, перевернуть полученную стопку и снова положить ее сверху колоды. За какое наименьшее число ходов при любом начальном расположении карт можно добиться того, чтобы все карты лежали рубашками вниз?

Д.Карпов

Второй день

5. Докажите, что уравнение

$$x^3+y^3=4(x^2y+xy^2+1)$$

не имеет решений в целых числах.

А.Калинин

6. Три прямоугольных треугольника расположены в одной полуплоскости относительно данной прямой l так, что один из катетов каждого треугольника лежит на этой прямой. Известно, что существует прямая, параллельная l, пересекающая треугольники по равным отрезкам. Докажите, что если расположить треугольники в одной полуплоскости относительно прямой l так, чтобы другие их катеты лежали на прямой l, то также найдется прямая, параллельная l, пересекающая их по равным отрезкам.

В.Вавилов

7. На диагонали AC ромба $ABCD$ взята произвольная точка E, отличная от точек A и C, а на прямых AB и BC — точки N и M соответственно, так что $AE = NE$ и $CE = ME$. Пусть K — точка пересечения прямых AM и CN. Докажите, что точки K, E и D лежат на одной прямой.

П.Кожевников

8. На доске написано число 0. Два игрока по очереди приписывают справа к выражению на доске: первый — знак «+» или «—», второй — одно из натуральных чисел от 1 до 1993. Игроки делают по 1993 хода, причем второй записывает каждое из чисел от 1 до 1993 ровно по одному разу. В конце игры второй игрок получает выигрыш, равный модулю алгебраической суммы, написанной на доске. Какой наибольший выигрыш он может себе гарантировать?

О.Богопольский, Д.Ван-дер-Флаасс

10 класс

Первый день

1. На стороне AC остроугольного треугольника ABC выбрана точка D. Медиана AM пересекает высоту CH и отрезок BD в точках N и K соответственно. Докажите, что если $AK = BK$, то $AN = 2KM$.

Е.Малинникова

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. Решите в положительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{1}{x_2}=4, \\ x_2+\dfrac{1}{x_3}=1, \\ x_3+\dfrac{1}{x_4}=4, \\ \ldots \\ x_{99}+\dfrac{1}{x_{100}}=4, \\ x_{100}+\dfrac{1}{x_1}=1. \end{cases}$$

А.Перлин

4. У каждого из жителей го-

рода N знакомые составляют не менее 30% населения города. Житель идет на выборы, если баллотируется хотя бы один из его знакомых. Докажите, что можно так провести выборы мэра города N из двух кандидатов, что в них примет участие не менее половины жителей.
А.Перлин

Второй день

5. См. задачу 5 для 9 класса.

6. Докажите, что

$$\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\ldots+\sqrt[1993]{1993}}} < 2.$$

В.Жуховицкий

7. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N соответственно. Диагональ BD пересекает стороны AM и AN треугольника AMN соответственно в точках E и F, разбивая его на две части. Докажите, что эти части имеют одинаковые площади тогда и только тогда, когда точка K, определяемая условиями $EK \parallel AD$, $FK \parallel AB$, лежит на отрезке MN.
М.Сонкин

8. Из квадратной доски 1000×1000 клеток удалены четыре прямоугольника 2×994 (рис. 1). На клетке, помеченной звездочкой, стоит кентавр — фигура, которая за один ход может перемещаться на одну клетку вверх, влево или по диагонали вправо и вверх. Двое игроков ходят кентавром по очереди. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре?
Р.Женодаров

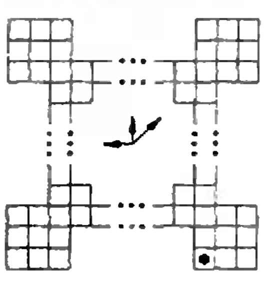


Рисунок 1

11 класс

Первый день

1. Найдите все натуральные числа n, для которых сумма цифр числа 5^n равна 2^n.
Д.Кузнецов

2. Докажите, что для любого натурального $n>2$ число

$$\left[\left(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+2}\right)^3\right]+1$$

делится на 8. (Через $[x]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее x.)
А.Калинин

3. Точка O — основание высоты четырехугольной пирамиды. Сфера с центром O касается всех боковых граней пирамиды. Точки A, B, C и D взяты последовательно по одной на боковых ребрах пирамиды так, что отрезки AB, BC и CD проходят через три точки касания сферы с гранями. Докажите, что отрезок AD проходит через четвертую точку касания.
М.Смуров

4. Дан правильный $2n$-угольник. Докажите, что на всех его сторонах и диагоналях можно так расставить стрелки, что сумма получившихся векторов будет равна нулю.
С.Токарев

Второй день

5. На доске написано:

$$x^3+\ldots x^2+\ldots x+\ldots=0.$$

Два школьника по очереди вписывают вместо многоточий действительные числа. Цель первого — получить уравнение, имеющее ровно один корень. Сможет ли второй ему помешать?
И.Сергеев

6. Семь треугольных пирамид стоят на столе. Для любых трех из них существует горизонтальная плоскость, которая пересекает их по треугольникам равной площади. Докажите, что существует плоскость, пересекающая все семь пирамид по треугольникам равной площади.
В.Вавилов

7. Дан правильный треугольник ABC. Через вершину B проводится произвольная прямая l, а через точки A и C проводятся прямые, перпендикулярные прямой l, пересекающие ее в точках D и E. Затем, если $D\neq E$, строятся правильные треугольники DEP и DET, лежащие по разные стороны от прямой l. Найдите геометрическое место точек P и T.
А.Савин

8. В стране 1993 города, и из каждого выходит не менее 93 дорог. Известно, что из любого города можно проехать по дорогам в любой другой. Докажите, что это можно сделать не более чем с 62 пересадками. (Дорога соединяет между собой два города.)
Е.Малинникова

Заключительный этап

9 класс

Первый день

1. Натуральное число n таково, что числа $2n+1$ и $3n+1$ являются точными квадратами. Может ли при этом число $5n+3$ быть простым?
Е.Гладкова

2. Отрезки AB и CD длиной 1 пересекаются в точке O, причем $\angle AOC=60^\circ$. Докажите, что $AC+BD\geq 1$.
С.Берлов

3. Квадратный трехчлен $f(x)$ разрешается заменить на один из трехчленов

$x^2 f\left(1+\frac{1}{x}\right)$ или $(x-1)^2 f\left(\frac{1}{x-1}\right)$. Можно ли с помощью таких операций из квадратного трехчлена x^2+4x+3 получить трехчлен $x^2+10x+9$?

А.Перлин

4. См. задачу М1407.

Второй день

5. Целые числа x, y и z таковы, что $(x-y)(y-z)(z-x)=x+y+z$. Докажите, что число $x+y+z$ делится на 27.

Н.Агаханов

6. Внутри окружности расположен выпуклый четырехугольник, продолжения сторон которого пересекают ее в точках A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1 и D_2 (рис. 2). Докажите, что если $A_1B_2=B_1C_2=$ $=C_1D_2=D_1A_2$, то четырехугольник, образованный прямыми A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 и D_1D_2, можно вписать в окружность.

Д.Терешин

7. Какое наибольшее число фишек можно поставить на клетки шахматной доски так, чтобы на любой горизонтали, вертикали и диагонали находилось четное число фишек?

С.Зайцев

8. См. задачу М1406.

10 класс

Первый день

1. Длины сторон треугольника — простые числа. Докажите, что его площадь не может быть целым числом.

Д.Митькин

2. Из центра симметрии двух равных пересекающихся окружностей проведены два луча, пересекающие окружности в четырех точках, не лежащих на одной прямой. Докажите, что эти точки лежат на одной окружности.

Л.Купцов

3. См. задачу 3 для 9 класса.

4. См. задачу М1408.

Второй день

5. См. задачу 5 для 9 класса.

6. См. задачу М1410, а).

7. Квадратная доска разделена сеткой горизонтальных и вертикальных прямых на n^2 клеток со стороной 1. При каком наибольшем n можно отметить n клеток так, чтобы любой прямоугольник площади не менее n со сторонами, идущими по линиям сетки, содержал хотя бы одну отмеченную клетку?

Д.Ван-дер-Флаасс

8. Назовем усреднением последовательности (a_k) действительных чисел последовательность (a'_k) с общим членом $a'_k=(a_k+a_{k+1})/2$. Рассмотрим последовательности: (a_k), (a'_k) — ее усреднение, (a''_k) — усреднение последовательности (a'_k) и т.д. Если все эти последовательности состоят из целых чисел, то будем говорить, что последовательность (a_k) — хорошая. Докажите, что если последовательность (x_k) — хорошая, то последовательность (x_k^2) — также хорошая.

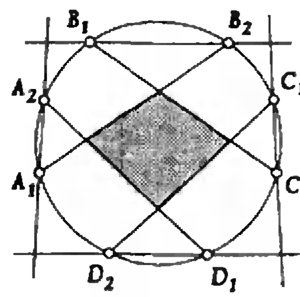


Рисунок 2

Д.Тамаркин

11 класс

Первый день

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. Два прямоугольных треугольника расположены на плоскости так, что их медианы, проведенные к гипотенузам, параллельны. Докажите, что угол между некоторым катетом одного треугольника и некоторым катетом другого треугольника вдвое меньше угла между их гипотенузами.

К.Фельдман

3. Найдите все функции $f(x)$, определенные при всех положительных x, принимающие положительные значения и удовлетворяющие при любых положительных x и y равенству $f(x^y)=f(x)^{f(y)}$.

С.Токарев

4. См. задачу М1409.

5. Найдите все четверки действительных чисел, в каждой из которых любое число равно произведению каких-либо двух других чисел.

Д.Митькин

6. В строку записаны в некотором порядке натуральные числа от 1 до 1993. Над строкой производится следующая операция: если на первом месте стоит число k, то первые k чисел в строке переставляются в обратном порядке. Докажите, что через несколько таких операций на первом месте обязательно окажется число 1.

Д.Терешин

7. В турнире по теннису n участников хотят провести парные (двое на двое) матчи так, чтобы каждый из участников имел своим противником каждого из остальных ровно в одном матче. При каких n возможен такой турнир?

С.Токарев

8. См. задачу М1410, б).

ПРИЗЕРЫ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Анапа, апрель-май 1993г.

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Борисов А. — Нижний Новгород,
Куликов М. — п. Черноголовка Московской обл.,
Норин С. — Санкт-Петербург,
Петров К. — Москва,
Сай С. — Санкт-Петербург,
Челкак Д. — Санкт- Петербург;

по 10 классам —

Бондарко М. — Санкт- Петербург,
Тарасов А. — Москва;

по 11 классам —

Вольвовский Ю. — Москва,
Панов Д. — Москва,
Поздняков А. — Санкт-Петербург,
Розенблюм Е. — Санкт- Петербург,
Федоров Р. — Москва.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Евдокимов А. — Санкт-Петербург,
Есаулова В. — Санкт-Петербург,
Козлов М. — Санкт- Петербург,
Никитин П. — Мурманск,
Рудо Е. — Санкт- Петербург,
Салихов К. — Казань;

по 10 классам —

Добринская Н. — Саратов,
Дюбина А. — Санкт-Петербург,
Карасев Р. — Долгопрудный Московской обл.
Лапунов А. — Киров,
Сенцов Ю. — Калуга,
Уткин П. — Челябинск;

по 11 классам —

Бендерский А. — Москва,
Бирюк А. — Краснодар,
Замятин В. — Киров,
Зеленов С. — Киров,
Иншаков А. — Москва,
Карепов С. — Краснодар,
Кожанов И. — Краснодар,
Кочерова А. — Долгопрудный Московской обл.,
Маркелов С. — Москва,
Миронов И. — Санкт-Петербург,
Перлин В. — Санкт- Петербург,
Пименов К. — Санкт Петербург,
Сосыка Е. — Краснодар,
Степанов А. — Москва.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Буфетов А. — Москва,
Бушков С. — Киров,
Ершов М. — Москва,
Зеленский О. — Темрюк Краснодарского края,
Игнатов Ф. — Тюмень,
Кадочников П. — Псков,
Кацев И. — Санкт-Петербург,
Курбин Д. — Омск,
Островский М. — Москва,
Рожков В. — Ангарск,
Смирнов Е. — Новосибирск;

по 10 классам —

Бархударян А. — Ереван, Армения,
Богданов И. — Пермь,
Бучкина И. — Москва,
Грушевский С. — Москва,
Кондратьев М. — Санкт-Петербург,
Крупенин С. — Москва,
Матвеев М. — Санкт-Петербург,
Поладян В. — Ереван, Армения,
Рабинович М. — Санкт-Петербург,
Филиппов В. — Санкт-Петербург,
Храпай М. — Тихвин Ленинградской обл.,
Шувалов В. — Москва;

по 11 классам —

Алексеев М. — Нижний Новгород,
Базлов Ю. — Санкт-Петербург,
Брюхов Е. — Челябинск,
Бунина Е. — Москва,
Дроздов А. — Новосибирск,
Пионтковская И. — Тула,
Порошенко Е. — Новосибирск,
Семенов К. — Саратов,
Сонкин Д. — Калуга,
Топчий А. — Омск.

Материалы зонального этапа нам предоставили члены жюри олимпиады Н.Агаханов, А.Калинин, Д.Митькин, С.Резниченко, а материалы заключительного этапа — С.Резниченко, Д.Терешин, И.Федоренко.

Физическая олимпиада школьников России

Как и в прошлые годы, в дни весенних школьных каникул проходил зональный этап Российской физико-математической и химической олимпиады школьников. На этот раз жителей Северо-Запада России принимал Мурманск, Южной России — Астрахань, Урала и Среднего Поволжья — Пенза, Сибири и Дальнего Востока — Томск. В этом туре участвовали победители предыдущих этапов (областных, краевых, республиканских), победители конкурса «Задачник «Кванта» и призеры Всероссийской и Межреспубликанской олимпиад прошлого года.

Семеро лучших девятиклассников, пять десятиклассников и пять одиннадцатиклассников от каждой зоны, а также школьники из Москвы, Санкт-Петербурга и Казахстана приняли участие в заключительном этапе олимпиады — во Всероссийской олимпиаде школьников по физике. Она прошла в конце апреля в Санкт-Петербурге.

Предлагаем вашему вниманию условия теоретических задач зонального и заключительного этапов олимпиады (некоторые задачи публикуются в рубрике «Задачник «Кванта».

Зональный этап

9 класс

1. Поздним весенним вечером молодой человек ростом h возвращается домой по краю горизонтального прямого тротуара с постоянной скоростью v (рис. 1). На расстоянии l от края тротуара стоит фонарный столб, на котором горит фонарь на высоте H от поверхности земли. Нарисуйте график зависимости скорости тени головы молодого человека от расстояния x.

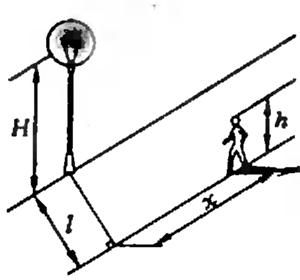


Рисунок 1

2. Для участия в Технической Олимпиаде Баренцева моря по подводному плаванию Чебурашка изготовил радиоуправляемую модель Крокодила Гены. Однако модель оказалась слишком тяжелой для своего объема — тонула в воде. Для поддержания ее на плаву Чебурашка прикрепил к ней несколько герметичных полиэтиленовых пакетов с воздухом. Оказалось, что в соленом Баренцевом море (плотность соленой воды $\rho_с = 1050$ кг/м^3) модель при погружении на глубину до $h_с = 7$ м всплывает, а при погружении на большую глубину тонет. А в пресноводной дельте реки Печоры (плотность пресной воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3) аналогичная критическая глубина погружения составляет всего $h_в = 1$ м. Найдите плотность модели Крокодила Гены.

Примечание: для воздуха можно использовать закон Бойля—Мариотта: для постоянного количества газа при неизменной температуре произведение давления газа (p) на занимаемый им объем (V) постоянно: pV=const.

3. См. задачу Ф1408.

4. См. задачу Ф1413.

10 класс

1. Невесомая абсолютно упругая доска лежит на двух опорах (рис. 2). На правом краю доски находится упругий шарик массой m_2. В некоторый момент времени правую опору убирают, и в этот же момент в левый край ударяется вертикально надавший упругий шарик массой m_1, имевший перед ударом о доску скорость v_0. На какую высоту над начальным уровнем подпрыгнет после этого шарик m_2? Куда полетит шарик m_1? Силой тяжести шариков при рассмотрении удара можно пренебречь.

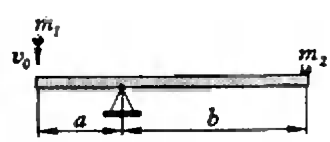


Рисунок 2

2. Определите КПД цикла, показанного на рисунке 3. Газ — идеальный, одноатомный, участки $2—3$ и $4—5$ на чертеже представляют собой дуги окружностей с центрами в точках O_1 и O_2.

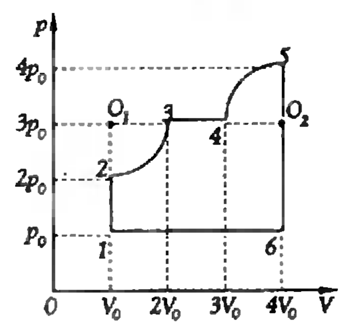


Рисунок 3

3. На дне колодца лежит маленький по размеру груз массой m, к которому привязан невесомый упругий шнур

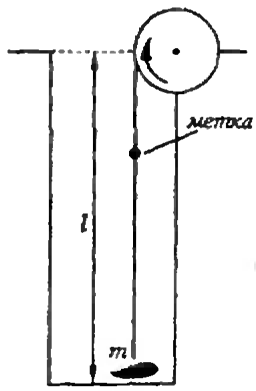


Рисунок 4

длиной l (рис. 4). Второй конец шнура прикреплен к барабану на уровне его оси. На шнуре на высоте $2/3\,l$ от дна колодца находится «метка». В начальный момент времени шнур не деформирован. Какую работу необходимо совершить для того, чтобы оторвать груз от дна колодца? Шнур при наматывании не проскальзывает относительно барабана (как бы прилипает к нему). Известно также, что при отрыве груза «метка» оказывается на высоте оси барабана.

4. Воздушный цилиндрический конденсатор емкостью C_0 представляет собой два тонкостенных металлических цилиндра одинаковой длины l и разных радиусов R и r, вставленных соосно один в другой ($l \gg R > r$). Какой станет емкость такого конденсатора, если радиусы R и r увеличить в два раза, а длину l уменьшить в три раза? При расчетах считайте известным, что напряженность поля между обкладками заряженного цилиндрического конденсатора убывает обратно пропорционально расстоянию от оси ($E=k/x$).

11 класс

1. См. задачу Ф1410.
2. См. задачу Ф1417.
3. Вдоль диаметра шарообразного астероида, плотность которого одинакова по всему объему, проходит узкий тоннель. С поверхности астероида в тоннель бросили камень со скоростью, равной первой космической для этого астероида. Через какое время камень вернется назад? Известно, что минимальный период обращения космических объектов вокруг астероида равен T_0. Гравитационное поле других небесных тел пренебрежимо мало.
Примечание: площадь эллипса равна $S = \pi ab$, где a и b — длины полуосей эллипса.
4. См. задачу Ф1415.

Заключительный этап

9 класс

1. Камень, брошенный под углом α к горизонту со скоростью v_0, летел по параболической траектории. По той же траектории с постоянной скоростью v_0 летит птица. Чему равно ее ускорение в верхней точке траектории?
2. Массивная доска AB скользит со скоростью $\vec{u}$ по гладкой горизонтальной поверхности (см. рис. 5, вид сверху). Из точки C одновременно толкают две легкие шайбы. Первая скользит со скоростью $\vec{v}_1$ по прямой CC_1, параллельной AB, вторая — со скоростью $\vec{v}_2$, направленной под углом α к $\vec{v}_1$. Через некоторое время шайбы столкнулись в точке D. Определите v_1 и v_2, если известно, что время до столкновения шайб в n раз больше времени до столкновения

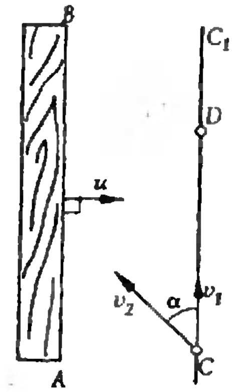


Рисунок 5

второй шайбы с доской. При ударе шайбы о доску потерь энергии на тепло и неупругие деформации не происходит.

3. В термос с горячей водой ($t = 40\,^\circ$C) опускают бутылочку с детским питанием. Она нагревается до температуры $t_1 = 36\,^\circ$C. Эту бутылочку вынимают, и в термос опускают другую точно такую же. До какой температуры она нагреется? До погружения в термос обе бутылочки имели температуру $t_0 = 18\,^\circ$C.
4. См. задачу Ф1414.

10 класс

1. Камень, брошенный под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0, описал некоторую траекторию. Если по этой же траектории полетит комар с постоянной скоростью v_0, то каким будет его ускорение на высоте, равной половине максимальной? Сопротивление воздуха не учитывайте.
2. См. задачу Ф1412.
3. См. задачу Ф1411.
4. Внутренняя энергия U и давление p неидеального газа задаются следующими выражениями: $U = \rho(T)V$ и

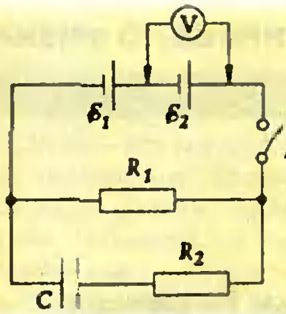


Рисунок 6

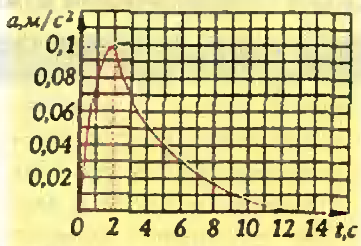


Рисунок 7

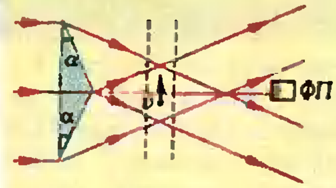


Рисунок 8

$p = 1/3\rho(T)$, где $\rho(T)$ — функция только температуры, а V — объем газа. Такой газ из начального состояния расширяется в адиабатическом процессе, совершая некоторую работу. Затем газ изохорически переводят в состояние с первоначальной температурой и, наконец, изотермическим процессом возвращают в исходное состояние. Найдите работу, совершенную газом при адиабатическом расширении, если в изохорическом процессе к нему было подведено количество теплоты Q, а в изотермическом процессе была совершена работа A.

5. Две батарейки с одинаковыми значениями ЭДС, но разными внутренними сопротивлениями ($r_1 = 0{,}1$ Ом, $r_2 = 1{,}1$ Ом) включены последовательно в цепь, содержащую конденсатор и резисторы, сопротивления которых равны $R_1 = 2{,}8$ Ом и $R_2 = 1{,}12$ Ом (рис. 6). Когда цепь разомкнута, идеальный вольтметр, подсоединенный к клеммам батареи $Б_1$, показывает напряжение $U_0 = 8$ В. Потом вольтметр подсоединяют к клеммам батареи $Б_2$ и замыкают ключ K. Найдите показания вольтметра 1) непосредственно после замыкания ключа, 2) после того как токи в цепи установятся.

11 класс

1. В момент времени $t = 0$ включается мотор, натягивающий трос парома. Натяжение троса растет, в момент времени $t_1 = 2$ с достигает максимального значения и затем остается постоянным. График изменения ускорения парома в зависимости от времени приведен на рисунке 7. Найдите максимальное натяжение троса, если масса парома $m = 5 \cdot 10^4$ кг, а сопротивление движению парома пропорционально квадрату его скорости.

2. Цикл, состоящий из изобары, изохоры и адиабаты, совершается рабочим веществом, внутренняя энергия которого U связана с давлением p и объемом V соотношением $U = kpV$. Работа, совершенная рабочим веществом на изобаре, в $m = 5$ раз больше работы внешних сил по сжатию вещества на адиабате. Коэффициент полезного действия цикла $\eta = 1/4$. Определите коэффициент k.

3. См. задачу Ф1409.

4. См. задачу Ф1416.

5. Для измерения скорости мельчайших частиц, взвешенных в текущей жидкости, используется интерференционная схема, изображенная на рисунке 8. Параллельный пучок света от лазера с длиной волны $\lambda = 0{,}63$ мкм падает на две одинаковые призмы, сложенные основаниями (бипризма). Преломляющий угол каждой из призм $\alpha = 5{,}7°$, показатель преломления $n = 1{,}5$. После прохождения через призмы свет разбивается на два пучка, которые проходят через кювету с жидкостью. Частицы, двигаясь вместе с жидкостью с некоторой скоростью v, рассеивают свет. Определите скорость частиц, если известно, что при регистрации рассеянного света фотоприемником ФП частота колебаний тока фотоприемника равна $f = 10$ кГц.

ПРИЗЕРЫ ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

Санкт-Петербург, апрель 1993 г.

Диплом I степени

по 9 классам получил

Браилов Ю. — Москва, с.ш. 57;

по 10 классам —

Курашов Д. — Москва, с.ш. 193;

по 11 классам —

Беленов Р. — Нижний Новгород, с.ш. 40.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Афанасьев А. — Нижний Новгород, ФМШ 82,
Васильев В. — Мытищи, с.ш. 9,
Догонкин Е. — Санкт-Петербург, с.ш. 556,
Колыгин Д. — Северодвинск, ФМШ 17,
Ли А. — Москва, с.ш. 463,
Пакулин К. — Березники, с.ш. 3,
Сидоров М. — Тольятти, ФТЛ 51,
Татаринов С. — Курск, с.ш. 10,
Челкак Д. — Санкт-Петербург, ФМШ 30;

по 10 классам —

Гращенко С. — Барнаул, с.ш. 123,
Ковальский А. — Казань, ФМШ 131,
Любшин Д. — Пермь, ФМШ 9,
Саляхутдинов Р. — Киров, физматлицей,
Стратонников А. — Сясьстройская с.ш.,
Филиппов В. — Санкт-Петербург, ФМШ 45;

по 11 классам —

Андреенко С. — Москва, с.ш. 57,
Базлов Ю. — Санкт-Петербург, ФМШ 239,
Косисын М. — Тольятти, с.ш. 39,
Пфлюк С. — Алма-Ата, ФМШ,
Худяков В. — Москва, СУНЦ МГУ.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Постников Н. — Санкт-Петербург, ФМШ 239,
Савельев А. — Санкт-Петербург, ФМШ 30;

по 10 классам —

Васильев И. — Москва, с.ш. 57,
Гиренко Д. — Москва, ФМШ 2,
[redacted]
Егоров С. — Санкт-Петербург, ФМШ 239,
Миюзов А. — Санкт-Петербург, ФМШ 45,
Нагорный И. — Подольск, с.ш. 23,
Рулева Д. — Рыбинск, лицей 52,
Танков П. — Санкт-Петербург, с.ш. 566;

по 11 классам -

Барабаш С. — Майкоп, с.ш. 3,
Бережнов А. — Казань, ФМШ,
Бочкарев О. — Саратов, ФМШ,
Быков С. — Москва, с.ш. 57,
Демьянов А. — Псков, технический лицей,
Зыков А. — Москва, с.ш. 218,
Кисловский Д. — Санкт-Петербург, ФМШ 239,
Коф А. — Барнаул, с.ш. 42,
Ларькин В. — Нижний Новгород, с.ш. 14,
Малинин С. — Ярославль, с.ш. 33,
Томилов Ф. — Архангельск, с.ш. 22,
Чигирев Д. — Санкт-Петербург, ФМШ 566.

Материалы зонального этапа олимпиады к публикации подготовили члены жюри олимпиады М.Гаврилов и О.Овчинников.
Официальные материалы заключительного этапа нам предоставило Министерство образования России.

НОВЫЙ ПРИЕМ В ВЗМШ

ВЗМШ — это Всероссийская заочная многопредметная школа Российской Академии образования при Московском университете им. М.В.Ломоносова.

Ее цель — рассказать о многих увлекательных вещах, связанных со школьными предметами, предложить и помочь решить интересные разнообразные задачи, научить самостоятельно работать с книгой, грамотно, четко и кратко излагать свои мысли на бумаге.

Всем окончившим ВЗМШ (в том числе ее филиалы и группы «Коллективный ученик» — см. ниже) выдаются соответствующие удостоверения.

Для поступления на любое отделение школы надо хорошо выполнить вступительную контрольную работу по соответствующему предмету, помещенную ниже. Преимуществом при этом пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах России, а также ближнего и дальнего зарубежья.

Чтобы быть принятым, не обязательно решить все задачи. Нас интересует ваше умение рассуждать, попытки (пусть даже не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы, Ваша тяга к знаниям.

Решения задач надо написать на русском языке в ученической тетради в клетку. Эта тетрадь высылается простой бандеролью; не сворачивайте ее в трубку. На обложку наклейте листок бумаги, разграфив и заполнив его по образцу (на каждое отделение — свое количество задач).

Область (Республика)	Московская
Фамилия, имя, отчество ученика	Иванов Петр Петрович
Год рождения	1979
Класс и школа	8 класс "Б" школы № 2
Фамилия, имя, отчество учителя математики, физики или русского языка и литературы	Учитель математики - Орлов Борис Петрович
Место работы и должность родителей	Отец - шофер автобазы № 1; мать - медсестра больницы № 7
Полный почтовый адрес (с указанием почтового индекса)	123456 г. Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	всего

В тетрадь вложите два листка бумаги размером 6x14 см с четко написанным Вашим адресом (включая индекс), фамилией, именем и отчеством, а также конверт с адресом.

Задачи в тетради надо записать в том же порядке, что и у нас: сначала условие, затем — решение.

Если Вы хотите поступить сразу на несколько отделений, каждую работу присылайте в отдельной тетради.

Выдержав конкурс и поступив к нам, Вы будете, начиная с сентября 1994 года, получать наши материалы, содержащие изложение теоретических вопросов, задачи для самостоятельного решения (с образцами разобранных примеров) и контрольные работы. Все контрольные работы будут проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями МГУ и других вузов, в которых имеются наши филиалы, а также научными сотрудниками различных учреждений. Филиалы работают по тем же программам и пособиям, что и московская группа ВЗМШ.

Предполагается, что часть заданий по математике и физике будет даваться по журналу «Квант», поэтому рекомендуем на него подписаться.

Без контрольной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение участники республиканских и победители областных (краевых) олимпиад для школьников и учащихся ПТУ.

Не успевшие или не сумевшие поступить в ВЗМШ на индивидуальное обучение могут заниматься по той же программе в группах «Коллективный ученик ВЗМШ». Каждая такая группа — кружок, работающий по программе ВЗМШ и по ее пособиям под руководством школьного учителя. Прием в эти группы проводится до 1 октября 1994 года на два потока: для тех, кто начнет учиться в 9 классе (трехгодичный поток), и для тех,кто начнет учиться в 10 классе (двухгодичный поток), соответственно для I и II курсов СПТУ (на физическое отделение — соответственно на одно- и двухгодичный потоки). Для зачисления в группы достаточно заявления учителя, руководящего кружком, с приложением списка учащихся и указанием класса (курса), в котором они будут учиться в 1994/95 учебном году. Заявление должно быть подписано директором школы (СПТУ) и заверено печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления следует направлять в адрес ВЗМШ.

Вступительную работу высылайте по адресу: *119823, ГСП, Москва, В-234, МГУ, ВЗМШ, на прием (с указанием отделения).*

Срок отправки вступительной работы — не позднее 25 апреля 1994 года (по почтовому штемпелю).

[illegible]
[illegible]

Принимаются учащиеся (с сентября 1994 г.) 9 и 10 классов.

Вступительную работу высылайте по адресу ВЗМШ или соответствующего филиала.

Филиалы математического отделения ВЗМШ при университетах имеются в городах: Бишкек, Воронеж, Донецк, Екатеринбург, Иваново, Ижевск, Магадан, Самара, Ташкент, Ульяновск, Чебоксары, Челябинск, Ярославль; филиалы при педагогических институтах — в городах: Акмола, Бирск, Брянск, Витебск, Вятка, Павлодар, Петрозаводск, Тернополь, Уральск, Ходжент; работает также филиал в Могилеве при областном Дворце пионеров.

Учащиеся, проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), в Беларуси (кроме Витебской и Могилевской областей) и в Прибалтике, присылают работы по адресу: *198097 Санкт-Петербург, ул. Трефолева, д. 32, С.-З. ЗМШ (на прием).*

[illegible]
[illegible]

Поступающие на трехгодичный поток решают задачи 1—10, на двухгодичный — задачи 4—13.

1. Можно ли фигуру в форме буквы «П»  составленную из 6 одинаковых квадратиков со стороной 1 см, разрезать на четыре части, из которых можно сложить прямоугольный треугольник с катетами 2 см и 6 см?

2. Дан правильный шестиугольник. Найдите на плоскости такую точку, сумма расстояний от которой до вершин шестиугольника наименьшая.

3. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 64 в клетках прямоугольной таблицы 8x8 так, чтобы суммы чисел во всех горизонтальных рядах были одинаковы?

4. В выражении $\left(1+x^6+x^8\right)^{100}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Чему равен коэффициент при:

а) x^{10}; б) x^{12}; в) x^{14}?

5. Центральный банк выпустил в обращение монеты достоинством в 15, 20 и 48 рублей и решил изъять из обращения все другие деньги.

а) Докажите, что любую сумму (в целое число рублей) можно заплатить этими монетами, быть может, получив сдачу.

б) Докажите, что любую сумму, начиная с некоторого N, можно заплатить такими монетами без сдачи.

в) При каком наименьшем N верно предыдущее утверждение?

6. Жители острова Утопия делятся на рыцарей, которые всегда говорят правду, лжецов, которые всегда лгут, и обывателей, которые иногда говорят правду, а иногда лгут. Как-то четыре жителя этого острова собрались в комнате, и между ними произошел такой разговор.

А: Рыцарь среди нас всего один.

Б: Да среди нас вообще нет рыцарей!

В: Уж вы то, Б, могли и помолчать! Вы — типичный обыватель!

Г: Не ссорьтесь! Двое из нас — лжецы, а остальные — нет!

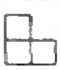
Кем (лжецом, рыцарем или обывателем) были *В* и *Г*, если известно, что ровно один из собеседников — обыватель?

7. Найдите все пары чисел (x,y), удовлетворяющие уравнению

$$4x^2y^2 + x^2 + 4y^2 + 32xy -$$
$$- 4x + 16y + 84 = 0.$$

8. Какова наибольшая возможная разность между двумя ближайшими четырехзначными числами с одинаковой суммой цифр?

9. Витя и Саша играют в такую игру. Сначала Саша берет прямоугольный листок клетчатой бумаги размером 6x8 клеточек и разрезает его ножницами на две части (линия разреза может быть и ломаной, но резать можно только по линиям), затем Витя разрезает один из получившихся кусков на две части, затем это делает Саша и т.д. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто победит при правильной игре обоих партнеров: Витя или Саша?

10. Леня хочет разрезать картонный прямоугольник размером 4x6 см на «полоски»  и «уголки»  (сторона каждого квадратика равна 1 см) таким образом, чтобы можно было заменить один из «уголков» на «полоску» и из этих частей снова сложить прямоугольник 4x6 см. Может ли у него это получиться?

11. При каких целых значениях a многочлен $x^4 + ax - 5$ можно разложить в произведение двух квадратных трехчленов с целыми коэффициентами?

12. 10 прямых, проходящих через одну точку, делят плоскость на 20 равных углов. Из произвольной точки на них опускаются перпендикуляры. Докажите, что их основания лежат в вершинах правильного 10-угольника.

13. В турнире по футболу (в один круг) участвовало 10 команд. Ни в одном матче этого чемпионата ни одна команда не забила более трех голов. Какое самое низкое место могла занять команда, забившая больше голов, чем любая другая, и пропустившая меньше голов, чем любая другая?

[illegible] на отделение «Физика»

Принимаются учащиеся (с сентября 1994 г.) 10 и 11 классов, независимо от места жительства. Курс обучения рассчитан на два года, однако одиннадцатиклассники, чтобы пройти всю программу за один год, могут обучаться одновременно в 10 и 11 классах (для этого решение вступительной работы нужно выполнить для обоих классов и указать оба класса на обложке тетради).

Вступительная работа на отделение «Физика»

Поступающие на двухгодичный поток решают задачи 1—4, но одногодичный — задачи 3—6.

1. По внутренней поверхности цилиндрического стакана радиусом R катается без проскальзывания колечко радиусом r (рис. 1). Центр колечка имеет постоянную угловую скорость ω относительно оси цилиндра. Найдите угловую скорость вращения колечка относительно оси, проходящей через его центр.

2. В сообщающихся сосудах, диаметры которых относятся как 1:2, находится вода. В широкий сосуд наливают дополнительно столб масла высотой H_0. На сколько поднимется уровень воды в узком сосуде? Плотность воды ρ_1, масла $\rho_2 < \rho_1$.

3. По наклонной штанге с углом наклона к горизонту α может скользить небольшое кольцо A массой m_1, связанное нитью с системой блоков (неподвижного B и подвижного C; см. рис. 2). Нить закреплена в точке D. К оси блока C привязан груз массой m_2. Кольцо отпускают без начальной скорости в момент $t = t_0$. Найдите зависимость скорости груза массой m_2 от времени, если коэффициент трения между кольцом и штангой μ. Блоки невесомы, нити невесомы и нерастяжимы.

4. Человек собирает яблоки в корзину, стоя на верхней ступеньке лестницы, прислоненной к яблоне в вертикальном положении. Лестница начинает падать, упираясь нижним концом в дерево. Оцените, в каком

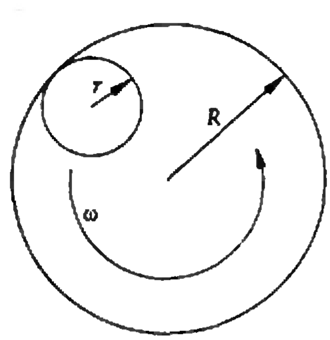


Рисунок 1

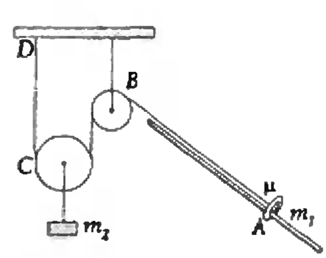


Рисунок 2

случае удар человека о землю будет сильнее: если он спрыгнет сразу или если до конца будет держаться за лестницу; если он сразу отпустит корзину с яблоками или будет держать ее в руках все время?

5. Найдите работу 1 моля идеального газа за 1 цикл в процессе *1—2—3—1*, график которого в координатах p, T изображен на рисунке 3 (*1—2* — отрезок прямой, проходящей через начало координат; *2—3* — отрезок вертикальной прямой, *3—1* — отрезок параболы, проходящей через начало координат). Известны температуры T_1, T_2, T_3.

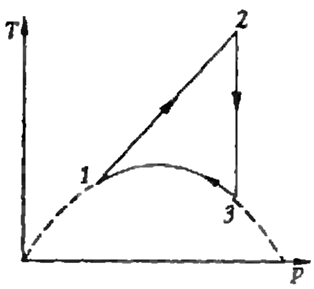


Рисунок 3

6. Конденсатор емкостью C подсоединен к источнику с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и внутренним сопротивлением r_1. Какой заряд установится на конденсаторе при подключении источника с ЭДС $\mathcal{E}_2$ и внутренним сопротивлением r_2 параллельно первому источнику?

Для поступающих на отделение «Биология»

Принимаются учащиеся (с сентября 1994 г.) 9 и 10 классов, независимо от того, в каком государстве они проживают (жители Москвы не принимаются).

Вступительная работа на отделение «Биология»

Поступающие на трехгодичный поток решают задачи 1—4, на двухгодичный — задачи 2—6.

1. Какую пользу растениям могут приносить животные, которые их едят?

2. Предложите различные гипотезы, объясняющие, как муравьи, удалившись от муравейника, могут находить дорогу обратно к «дому». Какие опыты можно провести для их проверки?

3. Как Вы думаете, какими болезнями человека могут болеть крокодилы, а какими — не могут? Ответ аргументируйте.

4. Какие преимущества дает животным пищевая специализация и в чем ее недостатки?

5. Очень маленький инопланетянин, размеры которого много меньше диаметра капилляра, попал в кровеносное русло некоего организма. Ему известно, что он мог оказаться внутри одного из следующих животных: жираф, колибри, лягушка, осьминог, шмель, щука. Инопланетянин может измерять физические и химические параметры окружающей его среды, определять строение и состав близлежащих клеток. Опишите, как инопланетянин может определить, в ком он находится.

6. В степных заповедниках, где нет диких копытных животных, часто практикуют умеренный выпас домашнего скота. Считается, что это способствует поддержанию разнообразия растительного сообщества. Как Вы думаете, действительно ли это так? Если да — то почему? Если нет — то почему?

Для поступающих на отделение «Филология»

Принимаются учащиеся (с сентября 1994 г.) 8—11 классов

Для тех, кого интересуют филологические науки — литературоведение и лингвистика, работает поток «Общая филология». В программе — введение в лингвистику (особое внимание уделено проблемам и методам структурной лингвистики; возможно участие в Московской традиционной олимпиаде по лингвистике и математике на базе МГУ и РГГУ); введение в литературоведение; логика и др.

Для тех, кто хочет глубже понять, как устроен русский язык и почему, кто хочет быть абсолютно уверенным в своей грамотности, работает поток «Русский язык».

Для тех, кто хочет глубже понять произведения русской литературы из школьной программы (обязательные для вступительного экзамена в вуз), узнать, что такое вступительное сочинение и каковы требования к нему, «набить руку» на сочинениях по всем программным произведениям, — работает поток «Сочинение».

Вступительная работа на отделение «Филология»

Задачи 1—9 — общие для поступающих на все потоки, задача 10 — только для потоков «Русский язык» и «Сочинение».

Не расстраивайтесь, если какие-то вопросы задания оказались Вам не по силам. Иногда для зачисления бывает достаточно хорошего, вдумчивого ответа на два — три вопроса. Обязательное требование к работе — изложите Ваши рассуждения при ответе на вопросы 4—6. Ответы без объяснений, как Вы их получили, зачтены не будут.

1. Решите смысловую пропорцию:

а) $\dfrac{\text{сидеть}}{\text{сесть}} = \dfrac{\text{держать}}{?}$,

б) $\dfrac{\text{класть}}{\text{лежать}} = \dfrac{?}{\text{гореть}}$,

в) $\dfrac{\text{пригласить}}{\text{гость}} = \dfrac{\text{посватать}}{?}$,

г) $\dfrac{\text{выплотить}}{\text{получка}} = \dfrac{\text{продать}}{?}$.

2. Даны пары близких по значению слов:

действие—поступок,
просить—велеть,
удачный—счастливый,
ложно—неправильно,
мотив—мелодия.

Задани 1. Приведите примеры высказываний, в которых эти слова взаимозаменимы, и таких, где замена невозможна. Объясните причину этого.

Задание 2. Объясните, как и чем отличаются друг от друго по смыслу слова в каждой паре.

3. В инструкции к китайскому мелку от тараканов сказано: «Провести с этим мело в месте в котором тораканы часто двигаюсь. После задеют это лекорство тараканы сразу пасют».

Задание 1. Классифицируйте ошибки, которые Вы увидели в тексте. Попробуйте, где возможно, логически объяснить их происхождение.

Зодание 2. Что это зо слово — «пасют»? Откуда оно берется?

4. Даны словосочетания на ирландском языке и их перевод на русский язык в перепутанном порядке:

a mord, a bord, a xārtə, a γar'd'īn', a gārtə, a ŋar'd'īn', a dūrəs, a noxstur, a fostə, a dom, a far'k', a bar'k', a vark —

его корабль, его парк, их порк, его карта, их корта, его сад, их сад, их том, их поезда, их доктор, их порт, их палуба, его почта.

Задание 1. Устоновите, кокой перевод соответствует каждому сочетанию.

Задание 2. Переведите на ирландский язык:

их корабль, его порт, его палуба, их почта.

Примечания. Звук, обозначаемый ə, соответствует русскому безударному а; звук, обозначаемый x, — русскому х; γ — звонкий парный к х; ŋ — носовой, произносящийся в том же месте, что и к (соответствует звуку, который в английской и немецкой орфографии обозначается через ng). Знак ' после согласного обозначает его мягкость; черточка над гласным — его долготу.

5. Установите правила выбора уменьшительного суффикса (-ок, -ик или -чик) для следующих примеров:

катерок, вечерок, погребок, желобок, куполок, теремок, тетеревок; столик, слоник, дворик, клопик, холмик, коврик, ослик, кадрик, штампик, ромбик, цилиндрик, оркестрик, комарик, топорик; стульчик, плончик, кармончик, локончик, бульварчик, моторчик, сиропчик, перерывчик.

6. Даны местоимения и местоименные наречия венгерского языка с их переводами на русский язык:

amely — который, hogy — как?, nehany — несколько, valamikor — когда-нибудь, nehol — кое-где, aki — кто.

Задание 1. Переведите на венгерский язык:

сколько-нибудь, где, какнибудь, когда?, где-нибудь, иногда.

Задание 2. Переведите на русский язык:

valameli, hol?, ohogy, nemely, valaki, hany?.

Примечание. Отсутствие вопросительных знаков в некоторых местах, где их хотелось бы видеть, не следует считать опечаткой.

7. В главе 1 романа Пушкина «Евгений Онегин» есть такие строчки:

... Пред ним ростбиф окровавленный
И трюфли — роскошь юных лет.

Задание. Объясните, как Вы понимаете, почему «трюфли» названы «роскошью юных лет».

8. Прочитайте повесть Пушкина «Капитанская дочка». Почему она так называется?

9. Среди жанров словесного творчества один из самых распространенных — анекдот.

Зодание 1. Как менялось значение этого слова с течением времени?

Задание 2. Какие жанровые, т.е. обязательные, повторяющиеся, отличительные особенности современного анекдота Вы можете назвать? Приведите пример, подтверждающий Ваши рассуждения.

10. Укажите, какой именно поток Вас интересует. Изложите в форме мини-сочинения развернутый ответ на вопросы: почему именно этот поток Вы выбрали? чего бы Вы от него хотели? Примерный объем сочинения — 3—4 страницы.

[illegible]

Принимаются учащиеся (с сентября 1994 г.) 9,10 и 11 классов.

На этом отделении Вы познакомитесь с современными экономическими теориями и основами бизнеса и предпринимательства. Основной курс рассчитан на один год.

[illegible]

Вступительный тест включает вопросы по экономике, математике, истории, литературе и культуре. Достаточно указать номер вопроса и букву, соответствующую выбранному варианту ответа (правильный ответ оценивается в 1 балл, за неправильный ответ снимается 1/4 балла, отсутствие ответа — 0 баллов). На конверте после адреса и указания отделения напишите дополнительно: «Квант». Вступительный тест 1994 г.»

1. Подберите наиболее близкое по смыслу слово (или группу слов) к новому для русского языка слову «менеджер»: A) генеральный директор; B) директор; C) бухгалтер; D) администратор; E) предприниматель.

2. Монголо-татарское иго рухнуло после: A) Куликовской битвы; B) стояния на реке Угре; C) битвы при Калке; D) Ледового побоища; E) сражения на реке Воже.

3. Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству
$x(x-5) < 14$?
A) 7; B) 8; C) 9; D) 10; E) 11.

4. «Мы живем, под собою не чуя страны...» Автор стихотворения: A) Багрицкий; B) Блок; C) Брюсов; D) Мандельштам; E) Тютчев.

5. Вложение капитала в производство продукции и создание запасов — это: A) индексация; B) инвестиция; C) приватизация; D) ассигнация; E) корпорация.

6. Жители деревень Веники (100 чел.) и Мочалкино (200 чел.), расстояние между которыми 3 км, решили построить одну баню в таком месте, чтобы суммарный путь до бани для всех любителей попариться был минимальным. Баню следует построить: A) в Вениках; B) в Мочалкино; C) ровно на полпути между деревнями; D) в 1 км от Веников; E) в 1 км от Мочалкино.

7. Какая пара русских городов стояла на древнем торговом пути из варяг в греки? A) Новгород и Псков; B) Новгород и Киев; C) Москва и Смоленск; D) Владимир и Суздаль; E) Москва и Киев.

8. Кто написал роман «Бесы»? A) Гоголь; B) Достоевский; C) Булгаков; D) Пастернак; E) Солженицын.

9. Когда в России завершилось формирование единого всероссийского рынка? A) 11 век; B) 13 век; C) середина 15 века; D) середина 17 века; E) середина 19 века.

10. Школьник положил в коммерческий банк 200 рублей. Сколько денег будет на его счету через два года, если банк выплачивает 50% годовых (копейки не учитывайте)? A) 300 р; B) 350 р; C) 400 р; D) 450 р; E) 500 р.

11. После Октябрьской революции главой государства стал: A) Генеральный секретарь ЦК ВКП(б); B) Председатель Совнаркома; C) Председатель ВЦИК; D) Председатель Реввоенсовета; E) Председатель ВЧК.

12. Банкнотой называется: A) сообщение о банкротстве; B) долговая расписка; C) чек на покупку определенного товара; D) вид акции; E) банковский билет — вид денег.

13. Все стороны треугольника ABC разделены пополам точками D, E, F. Во сколько раз площадь треугольника DEF меньше площади треугольников ABC? A) в 2 раза; B) в 4 раза; C) в 6 раз; D) в 8 раз; E) в 16 раз.

14. Промышленная революция произошла впервые в следующей стране: A) Нидерланды; B) Англия; C) США; D) Испания; E) Германия.

15. После приватизации предприятий производительность выросла на 50%, поэтому решили рабочий день сократить в два раза. В результате выпуск продукции: A) возрос на 25%; B) уменьшился на 25%; C) не изменился; D) возрос на 10%; E) уменьшился на 10%.

16. Первая биржа в России была создана в: A) 1703 г.; B) 1801 г.; C) 1825 г.; D) 1861 г.; E) 1884 г.

17. Каждая акция компании «Пузырь» приносит 10% годовых, компании «Соломинка» — 15%, а «Лапоть» — 20%. На начало года цена всех акций одинакова. Какой набор из 10 акций лучше купить (в каждом наборе компании идут в указанном порядке): A) 2, 3, 5; B) 3, 2, 5; C) 1, 4, 5; D) 4, 1, 5; E) 6, 2, 2?

18. Самый известный менеджер, спасший компанию «Крайслер» от краха: A) Дейл Карнеги; B) Генри Форд; C) Ли Якокка; D) Джо Блоу; E) Рональд Рейган.

19. Больше всего нефти на территории бывшего СССР добывается: A) в Азербайджане; B) в Западной Сибири; C) в Восточной Сибири; D) в Карпатах;

E) в Поволжье.

20. На острове Чунга-Чанга в результате инфляции цены подскочили на 300%. Возмущенное население поймало вождя и потребовало вернуть цены к прежнему уровню. Но сколько процентов вождь должен уменьшить цены? A) на 300%; B) на 200%; C) на 100%; D) на 75%; E) на 50%.

ЗАОЧНАЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКАЯ ШКОЛА ПРИ МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся общеобразовательных учреждений — школ, лицеев, гимназий и т.п., расположенных на территории Российской Федерации, в 8, 9, 10 и 11 классы на 1994/95 учебный год.

Цель школы — помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам.

Обучение в школе бесплатное.

Кроме отдельных обучающихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки и факультативы, которые могут быть образованы в любом общеобразовательном учреждении двумя преподавателями — физики и математики.

Руководители кружка или факультатива набирают группы обучающихся (не менее 8—10 человек), успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Группа принимается в ЗФТШ, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчество ее руководителей и поименный список обучающихся (с указанием класса в 1993/94 учебном году и итоговых оценок за вступительные задания по физике и математике). Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей (тетради с работами учащихся в ЗФТШ не высылаются) следует выслать до 25 мая 1994 года по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ, с указанием «Кружок» или «Факультатив»; телефон: 408-51-45. Работа руководителей заочных физико-технических кружков и факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением по представлению ЗФТШ при МФТИ как факультативные занятия.

Обучающиеся в ЗФТШ, руководители физико-технических кружков и факультативов будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ (6—7 заданий по каждому предмету в течение учебного года), а затем — рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по соответствующей теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания ЗФТШ составляют преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Работы обучающихся-заочников проверяют аспиранты и студенты МФТИ (часто — выпускники ЗФТШ). Работы членов физико-технических кружков или факультативов оценивают их руководители.

Для учащихся Москвы и Московской области, желающих посещать очные занятия по физике и математике по программе ЗФТШ, работают вечерние консультационные пункты, набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам собеседования по физике и математике. Справки по телефону: 408-51-45.

Вступительные задания по физике и математике каждый ученик представляет самостоятельно, на русском языке и аккуратно переписанные в одну школьную тетрадь. Порядок задач сохраняйте тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, заполненный четко, желательно печатными буквами, по образцу. Внизу под запол-

1. Область (край или Республика)	Смоленская обл.
2. Фамилия, имя, отчество	Ящерицын Алексей Михайлович
3. Класс, в котором учитесь	девятый
4. Номер, адрес и телефон общеобразовательного учреждения (обычная школа, с углубленным изучением ряда предметов, лицей, гимназия и т.п.)	№ 6, ул. Московская, 20, Вязьма, телефон 5-82-34 (обычная, класс с углубленным изучением математики)
5. Фамилия, имя, отчество Вашего преподавателя по физике по математике	 Иванова Ольга Антоновна Романова Татьяна Владимировна
6. Место работы и должность родителей отец мать	 завод "Программатор", электрик ЦРБ, медсестра
7. Подробный домашний адрес	215100 г.Вязьма Смоленской обл., ул. Московская, д. 37, кв. 6, телефон: 5-92-58
8. Ваши любимые учебные предметы и увлечения	
9. Цель поступления в ЗФТШ при МФТИ	

№ пп.									
Ф.									
М.									

ненной анкетой начертите таблицу для оценок за вступительное задание.

Для получения ответа на вступительное задание обязательно вложите в тетрадь конверт с написанным на нем Вашим адресом.

Срок отправления решений — *не позднее 15 марта 1994 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1994 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (обязательно и по физике, и по математике) высылайте по адресу: *141700 г. Долгопрудный Московской обл, Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.*

Для жителей Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Желающим поступить следует высылать работы по адресу: *252680 Киев, пр. Вернадского, д. 36, Институт металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ; телефон 444-95-24.*

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

В задании по физике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, 6—12 — для восьмых классов, 9—15 — для девятых классов, 13—19 — для десятых классов.

В задании по математике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, 3—8 — для восьмых классов, 5—11 — для девятых классов, 8—14 — для десятых классов.

Вступительное задание по физике

1. Из Москвы в Долгопрудный с интервалом 10 мин вышли два электропоезда, движущихся со скоростью 30 км/ч каждый. С какой скоростью двигался поезд, идущий в Москву, если он повстречал эти электропоезда через 4 мин один после другого?

2. Свеча, высота которой в начальный момент была h, находится на расстоянии d от стенки. Между свечой и стенкой на расстоянии $d/3$ от свечи стоит непрозрачный экран. С какой скоростью движется по стенке тень от экрана, если свеча сгорает за время t?

3. Археологи Табуретос и Недоспатос нашли при раскопках 10 слитков золота размером 5x10x20 см и 4 слитка платины таких же размеров. Разделив находку поровну, они погрузили ее на свои велосипеды. Кто из археологов сумеет доехать до гостиницы, если каждый велосипед выдерживает нагрузку не более 2000 Н? Масса Табуретоса 70 кг, а Недоспатоса 60 кг.

4. Винни-Пух, решив полакомиться яблоками с гигантской яблони, закинул на ее верхушку длинную веревку и полез по ней вверх. При этом, поднимаясь каждый раз на 1 м, он съедал по 1 кг яблок. В некоторый момент веревка, выдерживающая максимальную нагрузку 400 Н, обрывается. Сколько шишек набьет себе Винни-Пух, если, падая с высоты менее 3 м, он набивает одну шишку, с высоты от 3 м до 5 м — две, от 5 м до 7 м — три и т.д. Масса голодного Винни-Пуха 20 кг.

5. После успешного окончания маневров командир «зеленых», как обычно, послал группу захвата на танке за апельсинами и райским наслаждением «БАУНТИ». Туда группа проехала через мост, а обратно, решив сократить путь, — по льду. Будут ли в этот день «зеленые» испытывать райское наслождение, если известно, что лед выдерживает максимальное давлени 18 000 Па, масса танка со всем содержимым 1600 кг, ширина каждой гусеницы 20 см и длина ее соприкосновения со льдом 2 м?

6. Определите наименьшую площадь плоской льдины толщиной 40 см, способной удержать на воде весь 8 «А» класс в количестве 20 человек. Считайте, что средняя масса одного школьника 40 кг, плотность льда 0,9 г/см^3, плотность воды 1,0 г/см^3, $g = 10$ Н/кг.

7. В то утро попугай Кешка, как обычно, собирался сделать доклад о пользе банановодства и бананоедства. Позавтракав 5 бананами, он взял мегафон и полез на «трибуну» — на верхушку пальмы высотой 20 м. На середине пути он почувствовал, что с мегафоном ему не добраться до вершины. Тогда он оставил мегафон и дальше полез без него. Сумеет ли Кешка сделать доклад, если для доклада нужен запас энергии 200 Дж, один съеденный банан позволяет совершить механическую работу 200 Дж, масса попугая 3 кг, а масса мегафона 1 кг?

8. Аквариум доверху наполнен водой. С какой силой давит вода на стенку аквариума длиной 50 см и высотой 30 см?

9. Колба емкостью 0,5 л наполнена керасином и погружена в воду. Будет ли она плавать, если масса самой колбы 200 г? Плотность стекла 2,5 г/см^3, плотность керосина 0,8 г/см^3. Массу пробки в расчет не принимать.

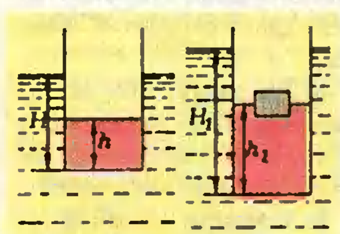


Рисунок 1

10. На поверхности жидкости плотностью ρ плавает сосуд с вертикальными стенками и горизонтальным дном площадью S (рис. 1). Внутрь сосуда налита вода до высоты h, осадка сосуда при этом равна H. Как изменятся высоты h и H, если в сосуд поместить деревянный брусок весом P?

11. В колбе находилась вода при температуре 0 °С. Откачиванием паров воду заморозили. Какая часть воды при этом испарилась? Температура в колбе поддерживалась постоянной и равной 0 °С.

12 (экспериментальная). Определите (приближенно) удельное сопротивление кипяченой воды. Используя поваренную соль, найдите зависимость удельного сопротивления соленой воды от концентрации в ней соли. Опишите Ваш эксперимент.

13. Из однородной проволоки изготовлено кольцо и подключено к батарейке с нулевым внутренним сопротивлением (рис. 2). При каком положении движка D в кольце будет выделяться минимальное количество теплоты?

14. На тонкой нити подвешен шарик. Нить приводят в горизонтальное положение и отпускают. В какой точке траектории ускорение шарика будет направлено горизонтально? В

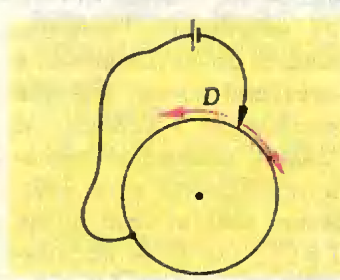


Рисунок 2

начальный момент нить не растянута, длина нити L, масса шарика m.

15. К однородному кубику, изначально покоящемуся на горизонтальной шероховатой поверхности, приложили силу F под углом α к горизонту (рис. 3). Построй-

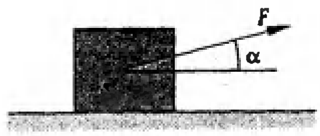


Рисунок 3

те график зависимости величины силы трения, действующей на кубик, от угла α. Рассмотрите случаи, когда $F > mg$ и $F \le mg$, где m — масса кубика, g — ускорение свободного падения.

16. В объеме V_1 находится одноатомный газ при давлении p_1 и температуре T_1, а в объеме V_2 — одноатомный газ при давлении p_2 и температуре T_2. Объемы соединены маленькой трубочкой с краном, причем вначале кран закрыт. Какое давление и какая температура окажутся в этих объемах после открытия крана? Объемы теплоизолированы от окружающего пространства, размерами трубочки можно пренебречь.

17. В горизонтальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой M, находится газ. Газ нагревают. Поршень, двигаясь равноускоренно, в некоторый момент времени приобретает скорость v. Найдите количество теплоты, сообщенное газу. Внутренняя энергия газа равна $U = CT$, где C — постоянный коэффициент. Теплоемкостью сосуда и поршня, а также внешним давлением можно пренебречь.

18. В цилиндре под невесомым поршнем находится 1 м^3 насыщенного водяного пара. Какую массу воды при температуре 0 °C надо впрыснуть в цилиндр, чтобы весь пар сконденсировался? Атмосферное давление равно 10^5 Па. Теплоемкостью цилиндра и теплообменом с окружающей средой можно пренебречь.

19. Два одинаково заряженных шарика массой M каждый подвесили в одной точке на нитях одинаковой длины l. Шарики разошлись так, что угол между нитями стал прямым. Определите заряд шариков.

[illegible]

1. Найдите все простые числа p вида $p = q^4 + 1$, где q — также простое число.

2. Первая бригада, работая столько же времени, сколько и вторая, посадила в два раза больше деревьев. Первая бригада каждый день высаживала по 10 деревьев. Вторая бригада пять седьмых своей работы выполнила за 5 дней, а затем высаживала по 5 деревьев в день. Сколько всего деревьев высадили обе бригады?

3. В треугольнике ABC проведены высота BK и отрезок BL, перпендикулярный стороне AB. Известно, что $\angle ALB = 45^\circ$, а точка L делит отрезок KC пополам. Найдите длину стороны AC, если длина отрезка KC равна 4.

4. Докажите, что не существует пары целых чисел m и n, удовлетворяющих соотношению $m^2 - n^2 = 1994$.

5. В прямоугольном треугольнике ABC точки K и M принадлежат гипотенузе AB, причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите величину угла MCK.

6. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 + 2|x| + 1}}{|x - 2|} \ge 2.$$

7. Пусть при любом n сумма первых n членов некоторой последовательности равна $an^2 + bn + c$. При каких значениях параметров a, b и c эта последовательность является арифметической прогрессией?

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + x = 10, \\ y^2 + xy + y = 20. \end{cases}$$

9. В выпуклом четырехугольнике диагонали равны. Длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны a и b. Найдите площадь четырехугольника.

10. При каких значениях параметра α

$$(\alpha \ne \pi n, \quad n \in Z)$$

модуль разности корней уравнения

$$\left(\sin^2 \alpha\right) x^2 + x - 1 = 0$$

равен $\sqrt{5}$?

11. Радиусы описанной и вписанной в прямоугольный треугольник окружностей равны 5 и 2 соответственно. Найдите длины сторон треугольника.

12. Решите уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = q, \quad q \in R.$$

13. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки K, L, N являются серединами ребер BC, BB_1 и A_1D_1 соответственно. Найдите площадь сечения куба плоскостью KLN, если длина ребра куба равна единице.

14. Вершинами многоугольника являются точки пересечения прямых $y = x$ и $y = -x$ с окружностью

$$x^2 + (y - b)^2 = 4 \quad \left(0 \le b \le 2\sqrt{2}\right)$$

Выясните, при каких значениях параметра b площадь многоугольника будет наибольшей, и найдите эту площадь.

НОВЫЙ ПРИЕМ В СУНЦ МГУ и НГУ

Московский и Новосибирский государственные университеты объявляют набор учащихся в специализированные учебно-научные центры (СУНЦ) МГУ и НГУ, созданные на базе школ-интернатов при этих университетах. Первый тур вступительных экзаменов — заочный письменный вступительный экзамен для учащихся 9 и 10 классов 11-летней школы, интересующихся математикой, физикой, химией, экономикой, информатикой. Успешно выдержавшие заочный экзамен, по решению приемной комиссии, будут в апреле — мае 1994 года приглашены в областные центры Российской Федерации на устные экзамены.

Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради. На первой странице укажите свои анкетные данные:

1. Фамилия, имя, отчество (полностью)
2. Домашний адрес (подробный, с индексом)
3. Подробное название школы, класс

Работы отправляйте простыми бандеролями (обязательно вложите конверт с маркой с Вашим домашним адресом).

Если Вы проживаете в Европейской части России, высылайте работы по адресу: *121357 Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ, Приемная комиссия. Телефон для справок: 445-11-08.*

Внимание! В учебный центр МГУ без предоставления общежития принимаются жители г. Москвы.

Если Вы живете в Сибири, на Дальнем Востоке или в Средней Азии, пишите по адресу: *630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, Учебно-научный центр НГУ, Олимпиадный комитет.*

Срок отправки работ — *не позднее 30 марта 1994 года* (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Если Вы не сможете решить все задачи, не отчаивайтесь — комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач.

Внимание! Для учащихся 9 классов, поступающих в СУНЦ МГУ, в анкетных данных (на первой странице работы) укажите профиль обучения: физико-математический, компьютерно-информационный, экономический, химический, биофизический. Поступающим на компьютерно-информационное, экономическое и химическое отделения необходимо решить дополнительные задачи по профилю.

Желаем успеха!

Вступительные задачи (основные)

9 класс

1. Пусть I — центр вписанной в прямоугольный треугольник ABC (угол C — прямой) окружности. Известно, что $AI = a$, $BI = b$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AIB.

2. Решите уравнение

$$\left(x^2+5x+1\right)\left(x^2+4x\right)=20(x+1)^2.$$

3. Докажите, что число $3^{30}-2\cdot 6^{15}+2^{32}$ является составным.

4. Найдите наибольшее значение выражения $x+y$, если $x^2-2xy+2y^2=4$ (x,y — действительные числа).

5. Пусть AM и BN — медианы треугольника ABC, O — точка их пересечения. Найдите AB, если известно, что $AC = a$, $BC = b$, а точки M, C, N и O лежат на одной окружности.

6. Дальность полета снаряда, летящего по навесной траектории, равна максимальной высоте подъема $H = 1200$ м. Найдите максимальную высоту настильной траектории при той же дальности полета.

7. Вес тела массой $m = 100$ кг, лежащего на полу лифта, движущегося вниз, равен $P = 1020$ Н. Найдите ускорение лифта.

8. На гладкой горизонтальной плоскости лежит частица массой m_2. На нее налетает частица массой m_1. После абсолютно упругого центрального столкновения частицы разлетаются с одинаковыми по величине скоростями. Найдите отношение масс частиц.

9. В цилиндрическом сосуде плавает плитка пенопласта, на которой лежит кубик. Когда кубик сняли, уровень воды понизился на $h_1 = 15$ см. Затем кубик опустили в воду, и уровень воды поднялся на $h_2 = 5$ см. Найдите плотность материала кубика.

10 класс

1. Пусть I — центр вписанной в прямоугольный треугольник ABC (угол C — прямой) окружности. Известно, что $AI = a$, $BI = b$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AIB.

2. См. задачу 2 для 9 класса.

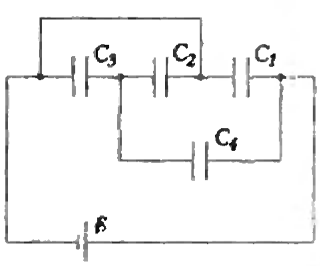
3. Докажите, что число $3^{54}-3^{27}\cdot 2^{12}+2^{24}$ является составным.

4. Найдите наибольшее значение выражения x^2+y^2, если $x^2-2xy+2y^2=4$ (x, y — действительные числа).

5. См. задачу 5 для 9 класса.

6. Два одинаковых сосуда соединены тонкой трубкой пренебрежимо малого объема. Система заполнена воздухом и находится при температуре $T_1 = 285$ К. Во сколько раз изменится давление в системе, если воздух в одном из сосудов нагреть до температуры $T_2 = 315$ К, а в другом — поддерживать при прежней температуре?

7. В схеме, изображенной на рисунке, емкости конденсаторов одинаковы: $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C = 1$ *мкФ*, ЭДС батареи $\mathcal{E} = 12$ В. Расстояние между пластинами конденсатора C_2 уменьшают в два раза. Найдите заряд, который протечет через батарею.



8. Высокоомный вольтметр, подключенный к батарейке, показал напряжение $U_1 = 6$ В. Когда к зажимам батарейки подключили лампочку, вольтметр показал напряжени $U_2 = 4$ В. Какое напряжение покажет вольтметр, если вместо одной подключить две лампочки, соединенные параллельно?

9. Квадратная рамка $ABCD$, изготовленная из однородного провода, лежит на горизонтальной плоскости. Длина стороны рамки $a = 10$ см. Рамку помещают в однородное постоянное магнитное поле. Вектор магнитной индукции параллелен диагонали BD, его величина $B = 10^{-2}$ Тл. К точкам A и C подсоединяют проводники, по которым проходит ток силой $I = 1$ А. Найдите величину приращения силы нормального давления рамки на плоскость.

Дополнительные задачи по информатике для поступающих на компьютерно-информационное отделение

На любом известном Вам языке программирования напишите программы с подробными комментариями или описанием алгоритма для решения следующих задач:

1. Дана таблица чисел, состоящая из M строк и N столбцов. Все числа в таблице различны. Напечатайте все такие числа, каждое из которых является максимальным в своей строке и в то же время минимальным в своем столбце.

2. Найдите значение следующего выражения

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5+\ldots}}}}}\ .$$

Дополнительные задачи по химии для поступающих на химическое отделение

1. Два галогенида некоторого металла (в состав которых входит один и тот же галоген) содержат 57,8% и 35,4% металла. Определите состав этих соединений.

2. Сплав магния и цинка массой 7,7 г при сгорании в избытке кислорода дает 10,1 г оксидов. Определите состав сплава. Как изменятся условие и решение этой задачи, если кислород заменить на азот?

3. Навеска соли угольной кислоты массой 0,84 г реагирует с избытком соляной кислоты с выделением 224 мл углекислого газа. Предложите не менее двух вариантов состава исходной соли.

Дополнительные задачи по математике для поступающих на экономическое отделение

1. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором графики функций $y = x^2$ и $y = 2x + a$ имеют общую точку (общие точки).

2. Мебельная фабрика выпускает шкафы и тумбочки. При их изготовлении используется два типа древесных материалов (досок). В таблице приведены данные о затратах каждого материала (в м) на изготовление единицы каждого вида продукции, а также величина прибыли от реализации единицы каждого вида продукции и общие объемы ресурсов каждого вида. Определите, сколько шкафов и тумбочек должна выпустить мебельная фабрика, чтобы общая прибыль была максимальной (решите задачу геометрически).

Внимание! *При учебно-научном центре МГУ открываются заочные подготовительные курсы по подготовке в МГУ и СУНЦ МГУ (обучение платное). Все желающие могут направлять свои заявки в Приемную комиссию СУНЦ МГУ (обязательно вложите конверт, заполненный на свой домашний адрес).*

	Затраты на единицу продукции		Объем ресурсов (м)
	шкаф	тумбочка	
Доски первого типа (м)	21	5	1340
Доски второго типа (м)	10	7	1100
Прибыль (руб.)	2400	1000	

КВАНТ ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи
(см. «Квант» № 9/10)

1. Число 1 — не простое и не составное, поэтому в «Большой чунгийской энциклопедии» может быть либо 2 тома, либо 4, либо 6, либо 8, но не больше восьми, поскольку дальше простые числа встречаются все реже и реже, а непростые, наоборот, все чаще. В «Большой чангийской энциклопедии», однако, не менее 10 томов (5 томов с составными номерами: 4, 6, 8, 9, 10, — и 5 с несоставными: 1, 2, 3, 5, 7).

2. ЗНА=695, НИЕ=903, СИЛА=2085.

3. См. рис. 1. Размеры чемодана можно подобрать так, чтобы удочка в нем не болталась, но уж во всяком случае с запасом хватит

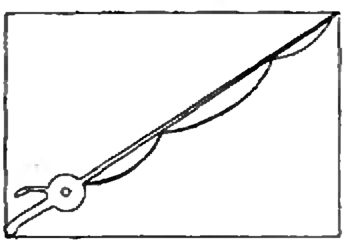


Рисунок 1

чемодана с квадратным дном размерами 3×3 м.

4. Один из возможных ответов изображен на рисунке 2.

5. По условию, $\angle ABC = \angle BKM$, поэтому треугольники ABC и BKM подобны (угол AMB у них

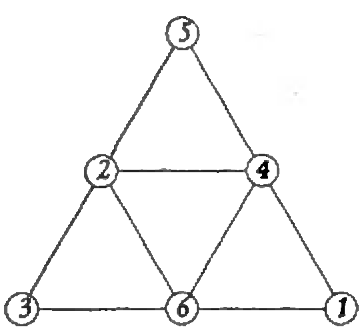


Рисунок 2

общий), и $\frac{KM}{MB} = \frac{MB}{AM}$. Но AM — медиана, т.е. $CM = MB$, следовательно, $\frac{KM}{CM} = \frac{CM}{AM}$. Поскольку $\angle AMC$ общий для треугольников AMC и KMC, то эти треугольники подобны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, равны и углы ACM и KCM.

Конкурс «Математика 6 — 8»
(см. «Квант» № 3/4)

17. Сначала следует заметить следующий факт, очень полезный в задачах такого типа: пятая степень натурального числа оканчивается на ту же цифру, что и само число. Отсюда следует, что и девятая степень, и тринадцатая степень оканчиваются на ту же цифру, что и само число, и вообще это верно для степеней вида $4k+1$. Осталось заметить, что $1993 = 4 \cdot 498 + 1$ и переписать данное в задаче выражение в виде

$$\left((n+1)^{1993} - (n+1)\right) + \left(n^{1993} - n\right) + \\ + \left((n-1)^{1993} - (n-1)\right).$$

Ясно, что каждое слагаемое в скобках, в соответствии с вышесказанным, делится на 10, поэтому и сумма делится на 10.

19. Перепишем уравнение в виде

$$(a-1)(b-1) + (a-1)(c-1) + \\ + (b-1)(c-1) = 3$$

и будем искать решения, удовлетворяющие соотношению $a \le b \le c$.

Пусть $a = 1$, тогда $(b-1)(c-1) = 3$, откуда $b = 2$, $c = 4$. Если $a = 2$, то $b = 2$, $c = 2$. При $a > 2$ очевидно, что решений нет.

20. Будем называть перестановку тома, стоящего последним, на первое место операцией A, а перестановку на первое место тома, стоящего третьим — операцией B. Ясно, что, совершая несколько раз подряд операцию A, мы циклически переставляем тома, не меняя их порядка следования, если будем считать, что первый том следует за последним. Совершим операцию B, а потом два раза операцию A, результирующую операцию назовем AAB. После применения этой операции том, стоящий третьим, останется стоять третьим, но будет стоять уже между другими томами, причем порядок следования остальных томов, если не считать этого тома, не изменится. Совершим еще раз операцию AAB, потом еще и еще. Том, стоявший третьим, будет оставаться на прежнем месте, но будет становиться между другими томами. Если же мы представим остальные тома стоящими по кругу, то после операции AAB том, стоявший на полке третьим, будет двигаться так, как это показано на рисунке 3, где он отмечен красным кружком, а его новые положения — белыми с красной границей, а остальные тома — черными кружками. Стрелки указывают направления перехода третьего тома. Мы

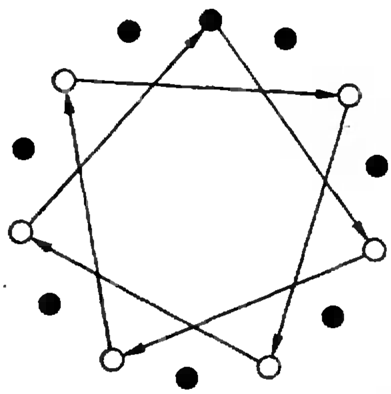


Рисунок 3

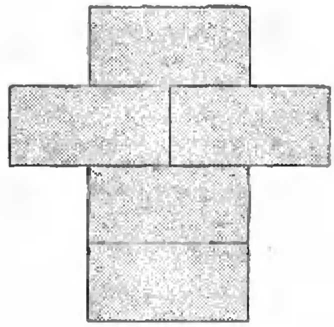


Рисунок 4

видим, что через 6 переходов этот том побывает за каждым из остальных томов и седьмым переходом вернется на старое место. Последнее нам не очень важно, но то, что он побывает за каждым из остальных томов — очень существенно. Опишем теперь процесс, или алгоритм, расстановки томов по порядку. Сначала, применив необходимое число раз операцию *A*, поставим на третье место том № 2, затем операциями *AAB* поставим его за томом № 1, далее операциями *A* поставим на третье место том № 3, а потом операциями *AAB* поставим его за томом № 2 и т.д., пока не поставим том № 8 за томом № 7. Останется поставить том № 1 на первое место операциями *A*. В результате тома будут стоять по порядку. Ясно, что это не самый короткий способ, но он наверняка приводит к нужному результату.

21. Пусть цифры пятизначного числа будут *a*, *b*, *c*, *d* и *f*. Посчитаем, в скольких трехзначных числах цифра *a* стоит на первом месте: на втором месте может стоять любая из четырех остальных, а на третьем — любая из трех оставшихся, итого $4 \cdot 3 = 12$ вариантов. Очевидно, что столько же трехзначных чисел со второй цифрой *a* и такое же количество чисел с третьей цифрой *a*.

Те же утверждения верны и для остальных четырех цифр. Отсюда следует, что искомое пятизначное число равно

$$1200(a+b+c+d+f)+120(a+b+c+d+f)+$$
$$+12(a+b+c+d+f)=1332(a+b+c+d+f)$$

Но 1332 делится на 9, поэтому и само число, и его сумма цифр делятся на 9. Эта сумма не меньше, чем $1+2+3+4+5=15$, и не больше, чем $9+8+7+6+5=35$, а чисел, лежащих в этих пределах и делящихся на 9, всего два: 18 и 27. Из них данному условию удовлетворяет только 27, и мы получаем, что искомое число равно $1332 \cdot 27 = {=}35964$.

22. Заметим, что сумма углов *BNM* и *BMN* равна сумме углов *BAC* и *BCA*, а сумма углов *ANM* и *CMN* равна сумме углов *MCA* и *NAC*. Но сумма углов *BAC* и *BCA* больше, чем сумма углов *MCA* и *NAC*, и, если предположить, что угол *ANM* больше, чем угол *BNM*, и угол *CMN* больше, чем угол *BMN*, то их сумма окажется большей суммы углов *BNM* и *BMN*, что противоречит вышесказанному.

23. Таких дней можно найти 9 в году. В невисокосном году это могут быть 1 февраля, 1 марта, 1, 3, 10, 17, 24 и 31 мая и 1 ноября, а в високосном году — 1 января, 1 апреля, 1 июля, 1, 2, 9, 16, 23 и 30 сентября.

24. Да, можно. Например, так, как на рисунке 4.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Заряженные частицы в электростатическом поле

1. $\alpha \ge 30^\circ$.

2. $x = \frac{eUL}{2dW}\left(\frac{L}{2}+L\right) = 0,5$ см.

3. $W = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) = 1,6\cdot10^{-18}$ Дж.

4. $A = 2qlE$.

5. $v = \sqrt{\frac{(2\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2)q}{2m}} = 1,96\cdot10^5$ м/с.

КАЛЕЙДОСКОП

1. а) $2^{2^{2^1}} = 16$; б) $3930 + 3980 = 7910$; в) $18969 + 18969 = 37938$; г) $23674 + 23674 = 47348$; д) $105 \cdot 8 + 76 = 916$; е) $\frac{639}{1065} = \frac{3}{5}$; ж) $1578 \times 3 = 4734$; з) $8796 : 3 = 2932$; и) КОН = 346, СТА = 192; к) КОН = 278, СТА = 134; л) КОН = 164, СТА = 392; м) $2402 \times 4 = 9608$.

2. а) См. рис. 5; б) см. рис. 6; в) см. рис. 7;

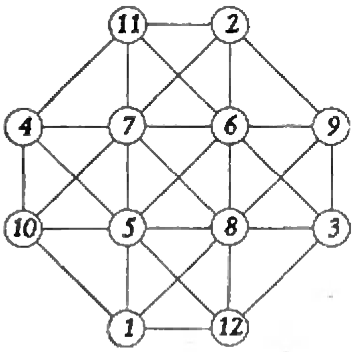


Рисунок 5

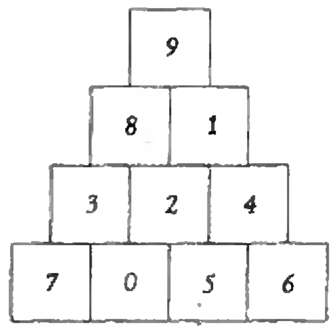


Рисунок 8а

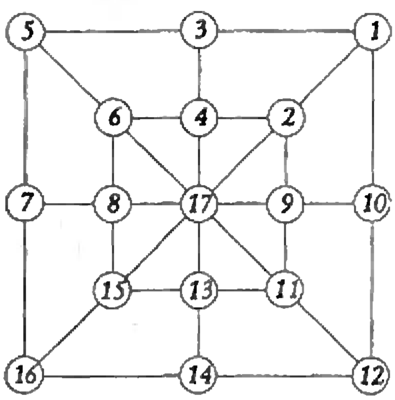


Рисунок 6

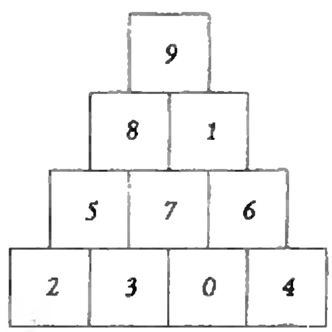


Рисунок 8б

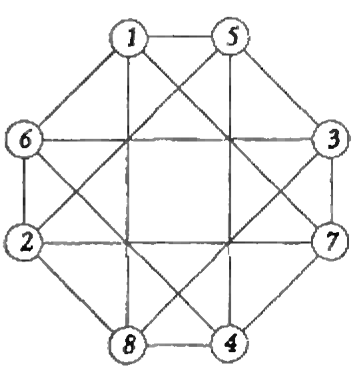


Рисунок 7

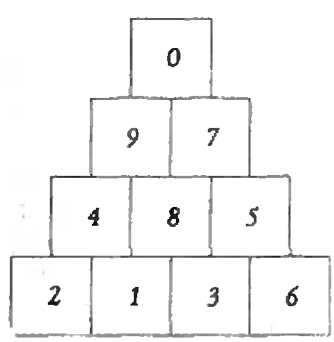


Рисунок 9

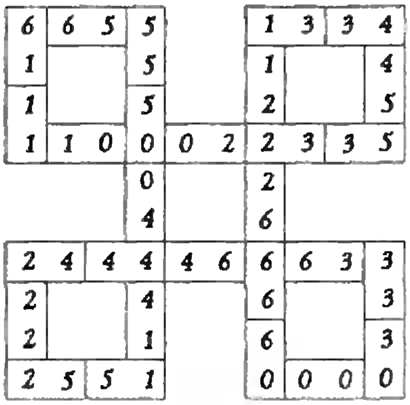


Рисунок 10

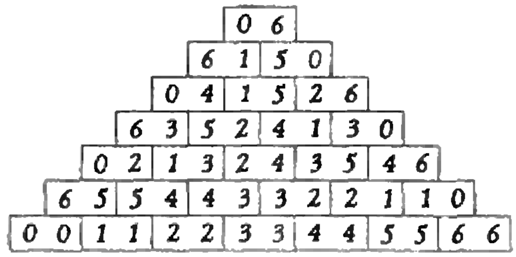


Рисунок 11

г) два решения (рис. 8 а, б); д) см. рис. 9.
3. а) См. рис. 10; б) см. рис. 11; в) нельзя; г) можно: один состоит из одной кости, а второй параллелепипед втрое больше и состоит из 27 костей; д) можно: два прямоугольника — это одна кость и прямоугольник из четырех костей, а параллелепипеды — это параллелепипед из двух костей и вдвое больший из шестнадцати.

ОЛИМПИАДЫ

XIX Всероссийская олимпиада школьников по математике
Зональный этап
9 класс

1. Рассмотрите разность левой и правой частей неравенства как квадратный трехчлен относительно a и вычислите его дискриминант.

2. 987654321.

3. а) Не обязательно. На рисунке 12 — ABC неравнобедренный треугольник, удовлетворяющий условию задачи (способ построения ясен из рисунка).

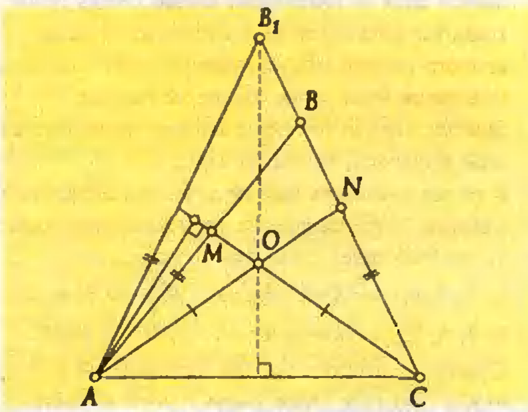


Рисунок 12

б) Обязательно. Пусть для определенности $\angle A > \angle C$. Возьмем на BC точку K такую, что $AK = CK$. Пусть L и T — точки пересечения прямой AK с CM и MN соответственно (рис. 13). Так как треугольник AKC равнобедренный и $AO = OC$, то прямая KO — его ось симметрии. Точки L и N симметричны относительно прямой KO, следовательно, $\angle KLM = \angle KNL$. Далее,

$\angle KNT < \angle KNL = \angle KLN < \angle KTN = \angle ATM < \angle BMN$

Но $\angle KNT = \angle BMN$, так как $BM = BN$. Полученное противоречие показывает, что неравенство $\angle A < \angle C$ невозможно. Следовательно, $\angle A = \angle C$, т.е. треугольник ABC равнобедренный.

4. За n ходов. Докажем, что не более чем за n ходов можно положить все карты рубашками вниз. Если изначально не все карты лежат рубашками вниз, разобьем колоду на группы подряд идущих карт, лежащих одинаково (т.е. в каждой группе все карты лежат либо рубашками вверх, либо рубашками вниз). Перевернем самую верхнюю группу. Тогда число групп уменьшится на единицу. Будем повторять эту процедуру до тех пор, пока все

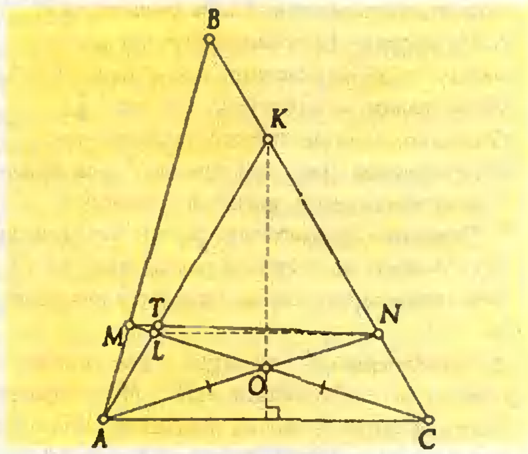


Рисунок 13

карты в колоде не будут лежать одинаково. Так как было не более n групп, для этого потребуется не более $n-1$ ходов. Еще один ход может понадобиться, чтобы перевернуть колоду, чтобы все карты лежали рубашками вниз.

В то же время существует расположение карт, при котором нельзя получить требуемое расположение карт в колоде меньше чем за n ходов. Такой будет колода, в которой нижняя карта лежит рубашкой вверх, вторая снизу — рубашкой вниз, третья снизу — рубашкой вверх, и так далее (убедитесь в этом).

5. **Указание.** Перепишем уравнение в виде $(x+y)^3 = 7(x^2y + xy^2) + 4$.

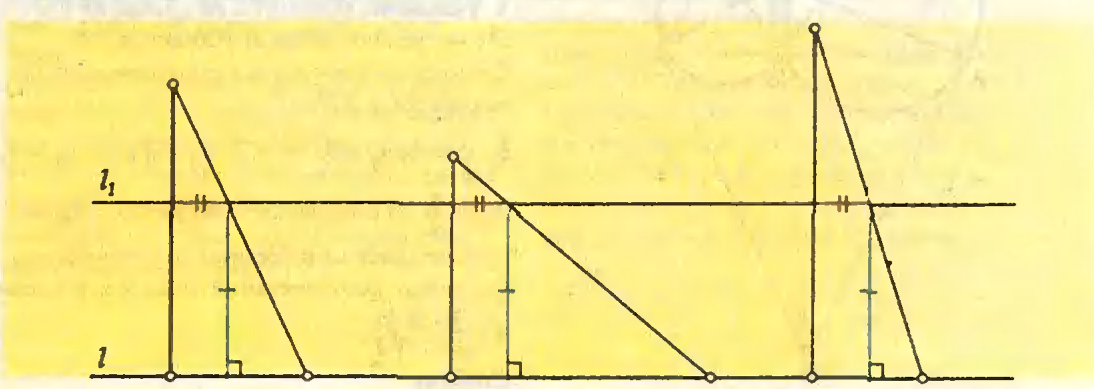


Рисунок 14

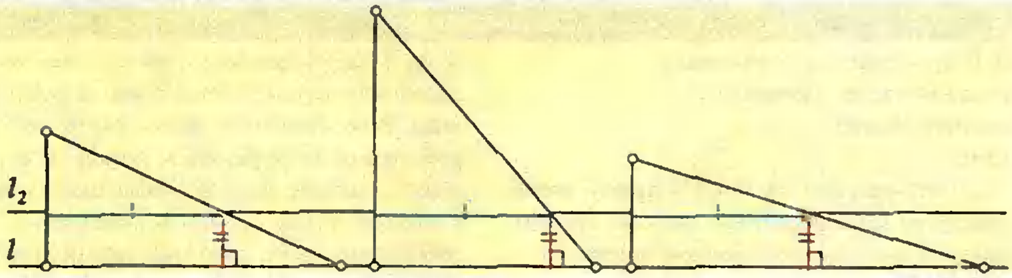


Рисунок 15

Осталось заметить, что куб целого числа не может давать остаток 4 при делении на 7.

6. На рисунке 14 красные отрезки равны между собой по условию, синие отрезки также равны между собой, так как $l_1 \parallel l$. Очевидно, в случае второго расположения треугольников (рис. 15) прямая l_2, содержащая синие отрезки, является искомой.

7. **Указание.** Рассмотрите случай, когда точки N и M лежат на сторонах ромба (рис. 16). Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Докажите сначала, что окружности, описанные около треугольников ANE и MEC, пересекаются в точке K. Затем, поскольку около четырехугольника $NBCE$ можно описать окружность ($\angle NBC + \angle NEC = \pi$), $\angle NEB = \angle NCB$. Но $\angle NCB = \angle KEM$, поэтому равны и углы AEB и CEK, т.е. $\angle AEB = \angle AED$. Но это и значит, что KE проходит через точку D.

8. 1993. Пусть первый игрок действует следующим образом: своим первым ходом он ставит знак, противоположный знаку числа,

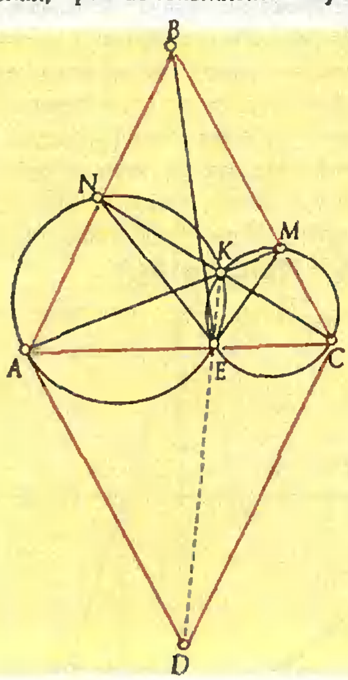


Рисунок 16

являющегося значением выражения на доске, если это число на доске не равно нулю, и любой знак в противном случае. Тогда после каждого (в том числе и последнего) хода второго игрока модуль алгебраической суммы, написанной на доске, будет не больше 1993. Значит, второй игрок не может гарантировать себе выигрыш, больший 1993.

В то же время он может добиться выигрыша, равного 1993. Составим две последовательности по 996 чисел с равными суммами:

1, 4, 5, 8, ..., $4k-3$, $4k$, ..., 1989, 1992 и

2, 3, 6, 7, ..., $4k-2$, $4k-1$, ..., 1990, 1991.

Стратегия второго игрока заключается в том, чтобы отдельно нумеровать плюсы и минусы, поставленные первым игроком, а затем писать на доске очередное число из первой последовательности после каждого плюса с номером не более 996 и из второй последовательности после каждого минуса с номером не более 996. Как только один из знаков появится на доске в 997-й раз, второму следует написать после него число 1993. Тогда сумма всех чисел на доске, перед которыми стоит этот знак, по модулю превысит сумму всех остальных чисел от 1 до 1992 по крайней мере на 1993. Поэтому далее второй игрок может выписывать еще не использованные числа от 1 до 1992 в любом порядке.

10 класс

1. **Указание.** Пусть $KE \perp AB$. Тогда $KE \parallel CH$, а EM — средняя линия треугольника ABC. Осталось воспользоваться подобием треугольников MEK и ACN.

3. $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$, ..., $x_{99} = 2$, $x_{100} = \frac{1}{2}$. В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для любых положительных чисел x и y имеем $x + \frac{1}{y} \ge 2\sqrt{\frac{x}{y}}$.

Поэтому

$$x_1+\frac{1}{x_2}\ge 2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}},$$

$$x_2+\frac{1}{x_3}\ge 2\sqrt{\frac{x_2}{x_3}},$$

...

$$x_{100}+\frac{1}{x_1}\ge 2\sqrt{\frac{x_{100}}{x_1}}.$$

Перемножив эти неравенства, получаем неравенство

$$\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_3}\right)\dots\left(x_{100}+\frac{1}{x_1}\right)\ge 2^{100},$$

но из системы уравнений следует, что

$$\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_3}\right)\dots\left(x_{100}+\frac{1}{x_1}\right)=4^{50}=2^{100}.$$

Следовательно, каждое из неравенств должно обращаться в равенство, т.е. $x_1=\frac{1}{x_2}$, $x_2=\frac{1}{x_3}$, ..., $x_{100}=\frac{1}{x_1}$.

4. Лемма. Пусть S — произвольное непустое множество жителей. Тогда в городе N найдется житель, знакомый не менее чем с 30% жителей из S.

Доказательство леммы. Обозначим через n и m число жителей в N и S соответственно. Назовем *весом* жителя число его знакомых в S. Так как *каждый из m жителей, входящих в* S, знаком не менее чем с $0{,}3n$ жителями города N, то число жителей в N, знакомых с кем-то из S, подсчитанное с учетом кратности жителя, равной его весу, не меньше $m(0{,}3n)$. Отсюда следует, что найдется житель, вес которого не меньше $\frac{1}{n}m(0{,}3n)=0{,}3m$. Лемма доказана.

Выдвинем в качестве первого кандидата произвольного жителя A. Рассмотрим множество S не знакомых с A жителей. Если множество S пусто, то в качестве второго кандидата можно взять любого жителя города N, отличного от A. Если множество S не пусто, то, применив к нему лемму, найдем жителя B, знакомого не менее чем с 30% жителей, входящих в S. Покажем, что выборы из двух кандидатов A и B удовлетворяют условию задачи.

Пусть житель A имеет k знакомых, а общее число жителей в N равно n. Тогда на выборы двух кандидатов A и B придет не менее чем $k+0{,}3(n-k)=0{,}3n+0{,}7k$ жителей, и так как $k\ge 0{,}3n$, то в выборах примет участие не менее $0{,}3n+0{,}7\cdot 0{,}3n=0{,}51n$ жителей, т.е. более половины жителей N.

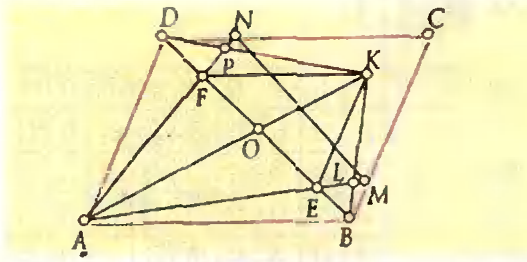


Рисунок 17

6. Указание. По индукции можно доказать, что при всех $n\ge 3$ справедливо неравенство $2^{n-1}\ge n+1$ при натуральном $n\ge 3$, из которого следует, что

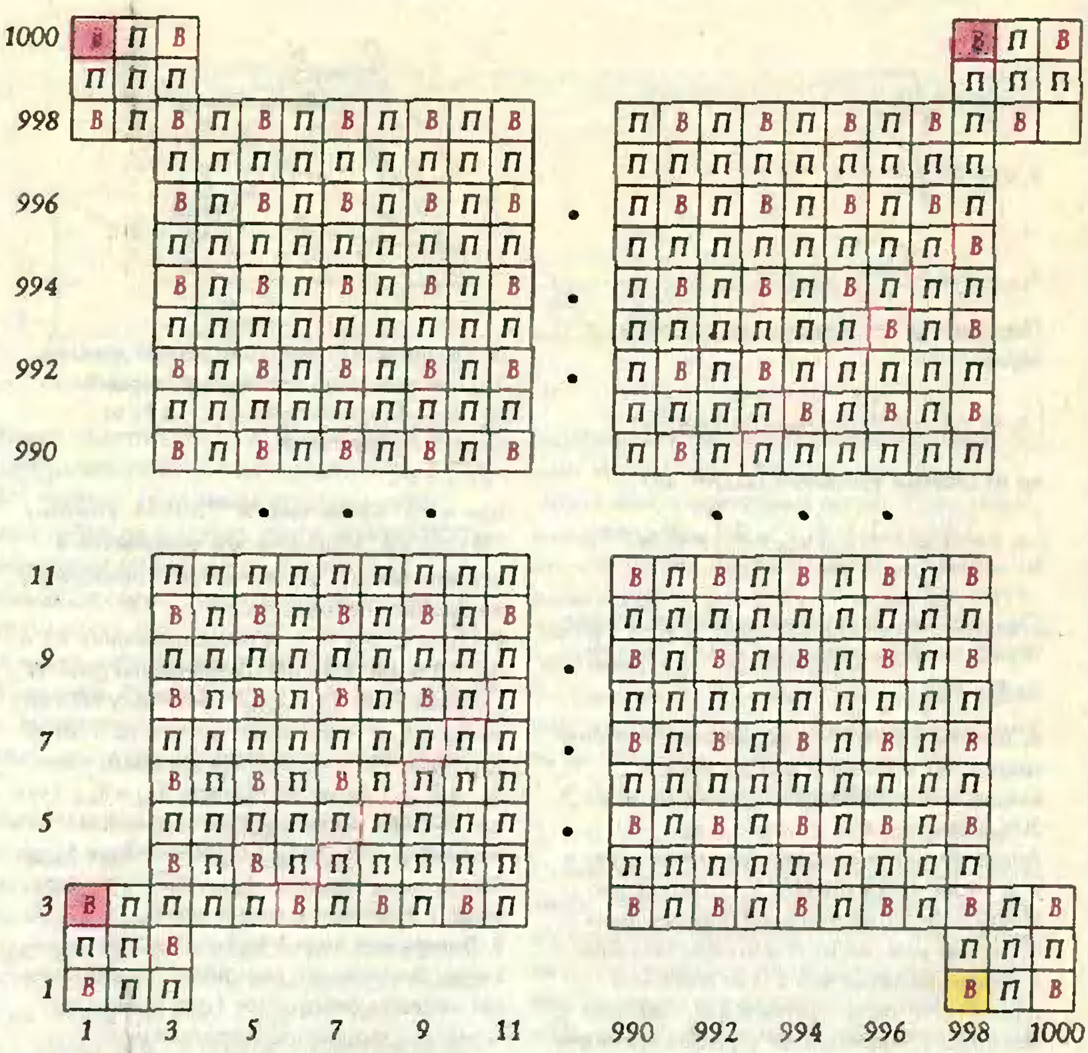
$$\sqrt[n-1]{n+1}\le 2 \qquad (*)$$

при $n\ge 3$. Кроме того, $2^{1993}>1993$. Поэтому $\sqrt[1993]{1993}<2$. Используя это неравенство и неравенство (*), последовательно приходим к требуемому неравенству.

7. Пусть O, L и P — точки пересечения KA и BD, KB и AM, KD и AN соответсвенно (рис. 17). Покажем, что $S_{AEF}=S_{EMKNF}$. Поскольку $FK \parallel CD$, то $S_{FPD}=S_{KPN}$. Аналогично, так как $KE\parallel CB$, то $S_{KLE}=S_{MLK}$. Из этих равенств получаем, что $S_{BKD}=S_{EMKNF}$. Далее, из равенств $S_{AOF}=S_{BOK}$ (так как $FK\parallel AB$), $S_{AOE}=S_{DOK}$ (так как $EK\parallel AD$) получаем, что $S_{AEF}=S_{BKD}$ и, значит, $S_{AEF}=S_{EMKNF}$. Теперь ясно, что $S_{AEF}=S_{EMNF}$ тогда и только тогда, когда точка K лежит на MN.

8. Выигрывает второй игрок. Будем называть клетку *выигрышной*, если игрок, ставящий на нее кентавра, выигрывает (при правильной игре), и *проигрышной* в противном случае. Тогда, очевидно, выигрышными являются клетки (1,3), (1,1000) и (998, 1000) на рисунке 18. Далее, клетка является выигрышной, если за один ход из нее можно попасть только в проигрышные клетки, и проигрышной в противном случае. Пользуясь этими правилами, можно для каждой клетки определить, является ли она выигрышной или проигрышной (см. рис. 18, обратите внимание на «излом» в регулярной структуре заполнения). Клетка (998, 1), на которой первоначально стоит кентавр, оказывается выигрышной. Следовательно, проигрывает тот, кто делает с нее ход, т.е. первый игрок.

Приведенное решение позволяет дать исчерпывающий ответ на вопрос задачи — указать выигрышную стратегию для второго игрока: ему надо заставить противника ходить с клетки (998,3), а в дальнейшем все время ставить кентавра на выигрышные клетки. В силу построения, ему это всегда удается.



клетка, на которой первоначально стоит кентавр

клетки, с которых начинается заполнение доски

Рисунок 18

11 класс

1. $n = 3$. Проверка показывает, что из чисел $n = 1, 2, 3, 4, 5$ подходит только $n = 3$. При $n \ge 6$ сумма цифр числа 5^n меньше, чем 2^n. Действительно, сумма цифр числа 5^n не больше, чем $9n$, но $2^n > 9n$ при $n \ge 6$.

2. **Указание.** Докажите, что

$$\left[\left(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+2}\right)^3\right]+1=8n+8 \text{ при } n \ge 3.$$

Для этого достаточно показать, что при $n \ge 3$ справедливы неравенства

$$8n+7<\left(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+2}\right)^3<8n+8$$

или

$$6n+5<3\left(\sqrt[3]{n^2(n+2)}+\sqrt[3]{n(n+2)^2}\right)<6n+6.$$

3. Пусть K, L, M и N — точки касания сферы с гранями пирамиды (рис. 19). Эти точки лежат в одной плоскости. Действительно, отрезки SK, SL, SM и SN равны как отрезки касательных, проведенных к сфере из точки S (S — вершина пирамиды). Значит, точки K, L, M и N лежат еще и на сфере с центром в точке S и радиусом SK, а следовательно, и на одной окружности, являющейся линией пересечения этой сферы с данной. Плоскость этой окружности перпендикулярна прямой SO — линии центров сфер, т.е. параллельна плоскости основания пирамиды и поэтому пересекает ее боковые ребра.

Обозначим эти точки пересечения через A_1, B_1, C_1 и D_1 (см. рис. 19). Соединим точку N с точками A и D.

Треугольник AA_1N равен треугольнику AA_1K,

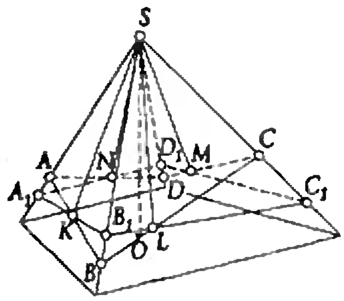


Рисунок 19

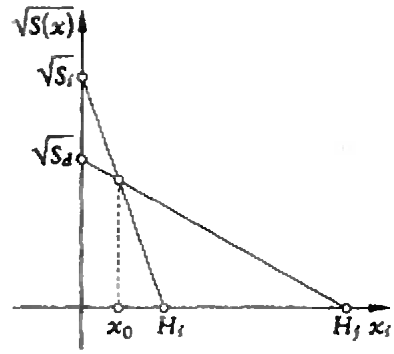


Рисунок 20

так как $A_1K = A_1N$, $AK = AN$ (отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны), а сторона AA_1 у них общая. Следовательно,

$\angle ANA_1 = \angle AKA_1$.

Аналогично $\angle BKB_1 = \angle BLB_1$, $\angle CLC_1 = \angle CMC_1$, и $\angle DMD_1 = \angle DND_1$. Кроме того, $\angle AKA_1 = \angle BKB_1$, $\angle BLB_1 = \angle CLC_1$ и $\angle CMC_1 = \angle DMD_1$ как вертикальные. Поэтому $\angle ANA_1 = \angle DND_1$, следовательно, точка N лежит на отрезке AD.

4. Будем называть диагональ правильного $2n$-угольника главной, если она проходит через его центр. Для каждой неглавной диагонали существует симметричная ей относительно центра неглавная диагональ. Таким образом, все неглавные диагонали разбиваются на пары. Поставив в каждой такой паре стрелки в противоположных направлениях, мы получим векторы, дающие в сумме $\bar{0}$.

Осталось расставить стрелки на сторонах и главных диагоналях.

Случай $n = 2k + 1$.

Расставим стрелки на сторонах по циклу, полученные векторы в сумме дадут $\bar{0}$.

Поставим стрелки на главных диагоналях к 1-й, 3-й, ... $(k-1)$-й вершинам. Тогда на каждой диагонали окажется ровно одна стрелка. Полученная система векторов переходит в себя при повороте вокруг центра на угол $\frac{2\pi}{2k+1}$, следовательно, при таком повороте переходит в себя и вектор, являющийся их суммой, значит, он равен $\bar{0}$.

Случай $n = 2k$.

Выделим в многоугольнике циклы, состоящие из пар соседних главных диагоналей и соединяющих их сторон. В каждом цикле поставим стрелки так, чтобы сумма получившихся векторов была равна $\bar{0}$. Осталось поставить стрелки на сторонах, взятых через одну. Расставим их по циклу и получим $\bar{0}$, так как они переходят в себя при повороте на угол π/k вокруг центра.

5. Не сможет. Рассмотрим следующую стратегию первого школьника: первым своим ходом он вписывает число 1 вместо многоточия перед x, а следующим ходом вписывает на оставшееся место число a, которое вписал второй школьник. В итоге получится многочлен $x^3 + ax^2 + x + a = (x + a)(x^2 + 1)$, имеющий ровно один корень $x = -a$.

6. Для каждой пирамиды с площадью основания S_i и высотой H_i, $i = 1, 2, ..., 7$, рассмотрим функцию $\sqrt{S_i(x)}$, выражающую зависимость площади сечения пирамиды горизонтальной плоскостью от расстояния x от этой плоскости до поверхности стола. Имеем:

$$\sqrt{S_i(x)} = \sqrt{S_i}\left(1 - \frac{x}{H_i}\right),\ 0 \le x \le H_i.$$

График такой функции — отрезок прямой, соединяющей точки $(H_i; 0)$ и $(0; \sqrt{S_i})$ (рис. 20). В силу условия два таких графика не могут не иметь общих точек, значит, они либо совпадают, либо имеют ровно одну общую точку. Рассмотрим два графика, которые имеют ровно одну общую точку с абсциссой x_0 (если таких не найдется, то все семь графиков совпадают, и можно выбрать любую горизонтальную секущую плоскость). Тогда из условия задачи следует, что любой другой график

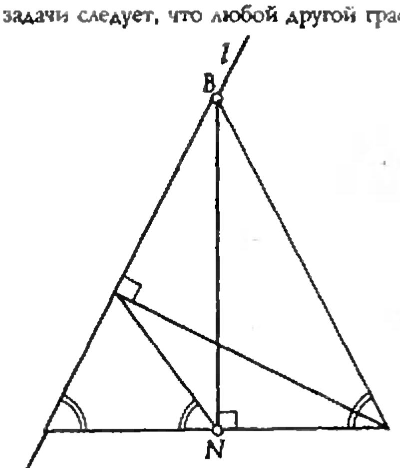


Рисунок 21

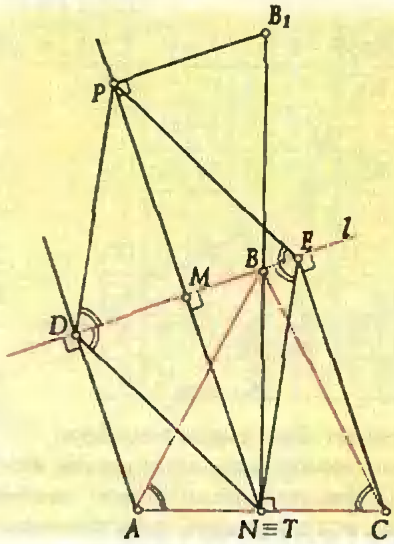


Рисунок 22

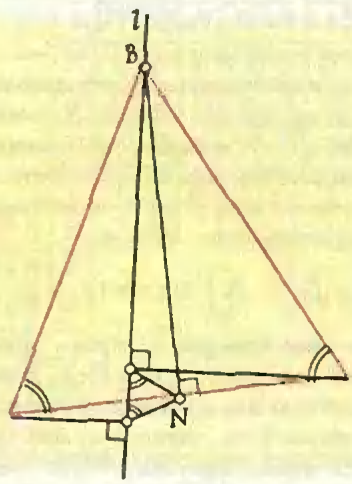


Рисунок 23

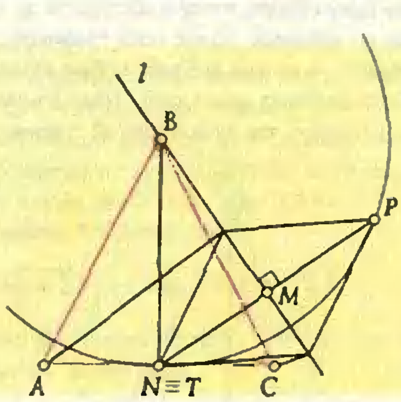


Рисунок 24

также проходит через эту точку. Поэтому плоскость, проходящая на расстоянии x_0 от стола, удовлетворяет требованию задачи.

7. Окружность с центром в точке B и радиусом, равным высоте треугольника ABC.

Возможны разные случаи расположения прямой l (рис. 21—23).

Рассмотрим случай, изображенный на рисунке 22, остальные случаи рассматриваются аналогично.

Пусть точка N — середина стороны AC. Так как углы ADB, BNA, BNC и BEC прямые, то четырехугольники $ADBN$ и $BECN$ можно вписать в окружности. Следовательно,

$\angle BDN = \angle BAN = 60°$

и $\angle BEN = \angle BCN = 60°$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Поэтому треугольник DNE правильный, какова бы ни была прямая l, не пересекающая отрезок AC.

Итак, вершина T одного из рассматриваемых треугольников является серединой отрезка AC. Вершина P другого правильного треугольника симметрична фиксированной точке $T = N$ относительно прямой l. Середина M отрезка TP такова, что $\angle TMB = 90°$, следовательно, точка M лежит на окружности с центром в середине BN и диаметром BN. Гомотетия с центром в точке N и коэффициентом 2 переводит точку M в точку P, поэтому точка P лежит на окружности с диаметром NB_1, где B — середина отрезка B_1N.

Покажем теперь, что любая точка P этой окружности, отличная от N, будет вершиной правильного треугольника DEP при некотором выборе прямой l. Для этого соединим точки P и N и через середину M отрезка NP проведем прямую, перпендикулярную NP. Она пройдет через точку B, так как серединный перпендикуляр к хорде является диаметром окружности (рис. 24). Если в качестве прямой l взять прямую BM, то точки P и $T = N$ будут вершинами правильных треугольников DEP и DET.

8. Пусть найдутся два города A и B такие, что из A в B нельзя проехать, сделав меньше 63 пересадок. Разобьем все города страны на группы следующим образом: нулевая группа состоит из города A, первая — из всех городов, в которые можно проехать из A без пересадок, и так далее (k-я группа состоит из всех городов, в которые можно проехать из A с $(k-1)$ пересадками, но нельзя с меньшим их числом). Получим не менее 64 групп. Заметим, что при каждом $k = 0, 1, ..., 21$ в группах с номерами $3k$, $3k+1$ и $3k+2$

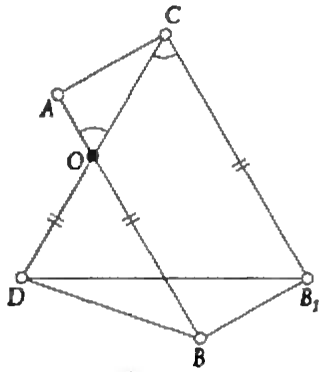


Рисунок 25

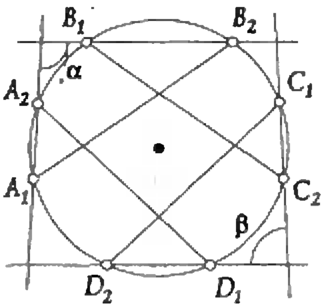


Рисунок 26

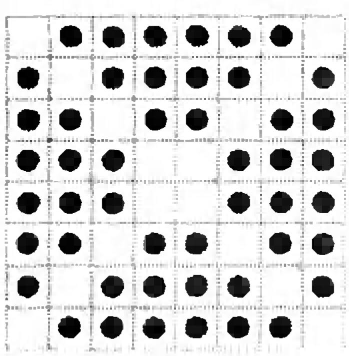


Рисунок 27

содержится в общей сложности не менее 94 городов, так как из какого-либо города $(3k+1)$-й группы выходит не менее 93 дорог, соединяющих его с городами указанных групп. Следовательно, всего городов в стране не менее, чем $94 \cdot 22 = 2068$, что противоречит условию задачи.

Заключительный этап

9 класс

1. Нет. Если $2n+1=k^2$, $3n+1=m^2$, то число $5n+3=4(2n+1)-(3n+1)=$ $=4k^2-m^2=(2k+m)(2k-m)$ является составным, поскольку $2k-m\neq 1$ (если $2k=m+1$, то $(m-1)^2=-2n$).

2. Пусть B_1 — точка, для которой $CB_1 \parallel AB$ и $CB_1=AB$ (рис. 25). Четырехугольник ABB_1C — параллелограмм и $AC=BB_1$. Кроме того, $BB_1+BD>B_1D$ и, следовательно, $AC+BD\geq B_1D$, но треугольник CB_1D равносторонний и, значит, $B_1D=1$. Таким образом, получаем, что $AC+BD\geq 1$.

3. Нельзя. Докажите, что дискриминанты квадратных трехчленов не изменяются при указанных преобразованиях.

4. См. решение задачи М1407 в одном из следующих номеров «Кванта».

5. **Указание.** Докажите, что числа x, y и z дают одинаковые остатки при делении на 3. Тогда из условия будет следовать, что число $x+y+z$ делится на 27.

6. Пусть величины двух противоположных углов четырехугольника, образованного прямыми A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 и D_1D_2, равны α и β (рис. 26). Так как хорды A_1B_2, B_1C_2, C_1D_2, и D_1A_2 равны, то равны и угловые величины дуг $A_1D_1B_2$, $B_1A_1C_2$, $C_1B_1D_2$ и $D_1C_1A_2$, которые мы обозначим через γ. По теореме о величине угла с вершиной вне круга

$$2\alpha=\smile A_1D_1B_2-\smile A_2B_1=\gamma-\smile A_2B_1,$$

$$2\beta=\smile C_1B_1D_2-\smile C_2D_1=\gamma-\smile C_2D_1$$

(символом $\smile$ обозначена угловая величина дуги).

Сложив эти равенства, получим, что

$$2\alpha+2\beta=2\gamma-\left(\smile A_2B_1+\smile C_2D_1\right)=2\gamma-$$
$$-\left(\smile B_1A_1C_2+\smile D_1C_1A_2-2\pi\right)=2\pi,$$

следовательно, $\alpha+\beta=\pi$.

7. Заметим, что на шахматной доске имеется 16 диагоналей, содержащих нечетное число клеток и не имеющих общих клеток. Следовательно, число фишек не может быть более чем $64-16=48$. Удовлетворяющая условию задачи расстановка 48 фишек получится, если поставить по фишке на каждую клетку доски, за исключением клеток двух главных диагоналей (рис. 27).

8. См. решение задачи М1406 в одном из следующих номеров «Кванта».

10 класс

1. Пусть длины сторон треугольника равны a, b, c. Из формулы Герона имеем

$$16S^2=P(P-2a)(P-2b)(P-2c),$$

где S — площадь, а $P=a+b+c$ — периметр треугольника. Допустим, что S — целое число. Ясно, что P должно быть нечетным числом.

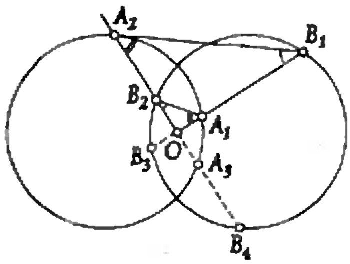


Рисунок 28

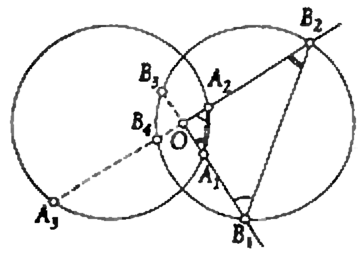


Рисунок 29

Следовательно, либо все числа a, b, c — четные, либо среди них одно четное и два нечетных. В первом случае $a = b = c = 2$ и площадь треугольника, равная $\sqrt{3}$, не целая. Во втором случае будем считать, что $a = 2$, а b и c — нечетные простые числа. Если $b \neq c$, то $|b-c| \geq 2$, и неравенство треугольника не выполнено. Следовательно, $b = c$, но тогда $S^2 = b^2 - 1$, что невозможно для натуральных b и S.

2. Пусть A_1 и A_2 — точки, лежащие на первой окружности, а B_1 и B_2 — точки, лежащие на второй окружности. Обратимся к ситуации, изображенной на рисунке 28 (случай, изображенный на рисунке 29, рассматривается аналогично).

Пусть точки A_3, B_3 и B_4 симметричны точкам B_2, A_1 и A_2 соответственно относительно точки O. По теореме о пересекающихся хордах $B_3O \cdot OB_1 = B_2O \cdot OB_4$, откуда

$OA_1 \cdot OB_1 = OB_2 \cdot OA_2$,

т.е. $OA_1/OB_2 = OA_2/OB_1$, так как $B_3O = OA_1$ и $OB_4 = OA_2$. Отсюда следует, что

$\Delta A_1OB_2 \backsim \Delta A_2OB_1$

(угол при вершине O у них общий). Поэтому $\angle A_1B_2O = \angle A_2B_1O$, т.е. $\angle A_1B_2A_2 + \angle A_2B_1O = 180°$, а это и означает, что точки A_1, B_1, B_2 и A_2 лежат на одной окружности.

4. См. решение задачи М1408 в одном из следующих номеров «Кванта».

6. См. решение задачи М1410, а) в одном из следующих номеров «Кванта».

7. При $n = 7$. Ясно, что если n клеток отмечены так, что выполняется условие задачи, то в каждой строке и в каждом столбце находится ровно одна отмеченная клетка. Считая, что $n \geq 3$ (очевидно, что $n = 2$ — не наибольшее!), возьмем строку A, в которой отмечена первая клетка, строку B, соседнюю с A, и строку C, соседнюю либо с A (и не совпадающую с B), либо с B (и нее совпадающую с A).

Пусть b — номер отмеченной клетки в строке B. Если $b \leq n - [n/2]$ или $b > [n/2] + 1$, то в строках A и B найдется прямоугольник площадью не меньшей n, не содержащий отмеченных клеток, следовательно,

$n - [n/2] < b < [n/2] + 2$

(здесь символом $[x]$ обозначена целая часть числа x).

Рассмотрим два прямоугольника, образованных пересечением строк A, B и C со столбцами с номерами $2, 3, \ldots, n - [n/2]$ и со столбцами с номерами $2 + [n/2], \ldots, n$.

В этих прямоугольниках не лежат отмеченные клетки строк A и B. Если $n > 7$, то площадь каждого из них не меньше n, но строка C содержит лишь одну отмеченную клетку, т.е. один из этих прямоугольников не содержит отмеченных клеток. Итак, мы доказали, что $n \leq 7$. Пример доски 7×7, удовлетворяющий условию задачи, приведен на рисунке 30.

Замечание. При $n = 6$ отметить клетки требуемым образом невозможно.

8. Назовем последовательность m-хорошей, если она сама и первые ее m усреднений состоят из целых чисел. Докажем, пользуясь методом математической индукции, что если последовательность x_k — хорошая, то последовательность (x_k^2) — m-хорошая для любого целого неотрицательного числа m. Из этого и вытекает утверждение задачи. Очевидно, что если последовательность (x_k) — хорошая, то последовательность (x_k^2) — 0-хорошая.

Предположим, что последовательность (x_k^2) — m-хорошая, и докажем, что она $(m+1)$-

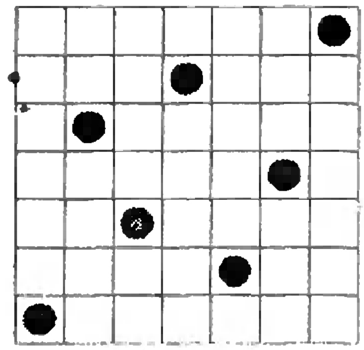


Рисунок 30

хорошая. Это следует из тождества

$$\frac{x_k^2+x_{k+1}^2}{2}=\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)^2+\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}-x_{k+1}\right)^2,$$

так как последовательности с общими членами $(x_k+x_{k+1})/2$ и $(x_k+x_{k+1})/2-x_{k+1}$ — хорошие, а поэтому, согласно индуктивному предположению, их квадраты — m-хорошие последовательности, т.е. последовательность (x_k^2) — m-хорошая.

Замечания

1. Нетривиальный пример хорошей последовательности дает арифметическая прогрессия с четной разностью, состоящая из целых чисел, например: 1, 3, 5, 7, ...

2. Изменим определение усреднения последовательности на более общее:

$$a_k'=\frac{a_k+a_{k+1}+\ldots+a_{k+p-1}}{p},\ p\in\mathbf{N}.$$

Известно доказательство аналогичного утверждения (если (x_k) хорошая, то и (x_k^p) хорошая) при $p=3$. Интересно было бы выяснить, при каких p оно справедливо. Гипотеза: только при простых p.

11 класс

2. Параллельным переносом одного из двух данных треугольников совместим вершины C и C' их прямых углов, а гомотетией того же треугольника с центром в точке C совместим их медианы (рис. 31). Тогда окружность с центром E и радиусом CE описана около обоих треугольников, причем угол между их гипотенузами — центральный и, значит, вдвое больше соответствующего вписанного угла, каковым является один из углов между катетами.

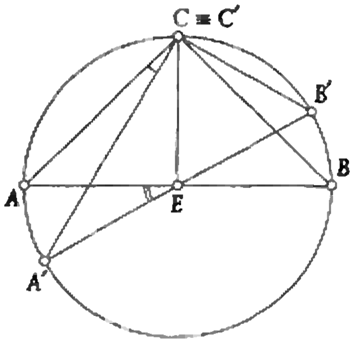


Рисунок 31

3. $f(x)=1$, $f(x)=x$.

Заметив, что $f(x)=1$ удовлетворяет условию задачи, будем искать другие решения. Пусть $f(a)\neq 1$ при некотором $a>0$. Тогда из равенств

$$f(a)^{f(xy)}=f(a^{xy})=f(a^x)^{f(y)}=f(a)^{f(x)f(y)}$$

следует, что

$$f(xy)=f(x)f(y) \qquad (1)$$

для любых x, $y>0$. А тогда из равенств

$$f(a)^{f(x+y)}=f(a^{x+y})=f(a^x)f(a^y)=f(a)^{f(x)}f(a)^{f(y)}=$$
$$=f(a)^{f(x)+f(y)}$$

следует, что

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad (2)$$

для любых x, $y>0$.

Из (1) имеем

$$f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)^2,$$

т.е. $f(1)=1$, а затем из (2) и (1) получаем

$$f(n)=f(1+\ldots+1)=f(1)+\ldots+f(1)=n,$$
$$f\left(\frac{m}{n}\right)\cdot n=f\left(\frac{m}{n}\right)\cdot f(n)=f(m)=m,$$

т.е. для любых m, $n\in\mathbf{N}$

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}. \qquad (3)$$

Предположим, что для некоторого $x>0$ имеет место неравенство $f(x)\neq x$, скажем, $f(x)<x$ (случай $f(x)>x$ рассматривается аналогично). Подобрав число $y=m/n$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$f(x)<y<x,$$

из (2) и (3) получаем противоречащее им неравенство

$$f(x)=f(y+(x-y))=f(y)+f(x-y)>f(y)=y.$$

Итак, сделанное выше предположение неверно, поэтому $f(x)=x$ для любого $x>0$, и, разумеется, найденная функция годится.

4. См. решение задачи М1409 в одном из следующих номеров «Кванта».

5. $\{0;0;0;0\}$, $\{1;1;1;1\}$, $\{-1;-1;1;1\}$, $\{-1;-1;-1;1\}$ (с точностью до перестановки чисел четверки).

Пусть $a\le b\le c\le d$ — модули искомых чисел. Заметим, что $a\ge bc$, так как либо $a=bc$, либо $a=bd\ge bc$, либо $a=cd\ge bc$. Аналогично $d\le bc$, следовательно, $bc\le a\le b\le c\le d\le bc$, т.е. $a=b=c=d=x$. Так как $x=x^2$, то $x=0$ или $x=1$. Остается проверить, что, если в четверке есть отрицательные числа, то их количество равно двум или трем.

6. Требуемое утверждение докажем индукцией по количеству n чисел в строке (в условии задачи взято $n=1993$).

При $n=1$ на первом месте стоит число 1. Пусть теперь для строки из $n-1$ чисел утверждение доказано. Докажем его для строки из n чисел. Если в результате выполнения описанных в условии операций число

$(n-1)$ окажется на последнем месте, то к первым n числам сразу можно применить предположение индукции, так как число n уже никуда не переместится.

Если же число n никогда не окажется на последнем месте, то оно не окажется и на первом месте. Кроме того, число, находящееся на последнем месте, никуда не перемещается. Поэтому, поменяв местами число n и число, стоящее на последнем месте, мы никак не изменим происходящего. Следовательно, к первым $(n-1)$ числам можно применить предположение индукции.

7. $n = 8k+1$, где $k \in \mathbf{N}$.

Пусть описанный в задаче турнир проведен. Тогда все противники любого из теннисистов разбиваются на пары, поэтому n нечетно. Все возможные пары противников разбиваются на четверки пар игравших в одном матче. Следовательно, число этих пар $n(n-1)/2$ кратно четырем, откуда $n-1 = 8k$.

Докажем, что при любом $k = 1, 2, \ldots$ указанный турнир для $n = 8k+1$ участников возможен.

При $k = 1$ для описания турнира поставим в соответствие теннисистам вершины правильного девятиугольника $A_1A_2\ldots A_9$. На рисунке 32 изображен матч пары A_1, A_2 против пары A_3, A_5, причем отрезками соединены противники. Поворачивая эту конструкцию из отрезков вокруг центра на углы, кратные $2\pi/9$, мы получим изображения для остальных восьми матчей. При этом каждая хорда вида A_iA_j появится в изображении один раз, поскольку она равна в точности одной из хорд A_2A_3, A_1A_3, A_2A_5 и A_1A_5.

При $k > 1$ выделим одного из $8k+1$ теннисистов, а остальных разобьем на k групп по 8 человек. Присоединяя выделенного теннисиста последовательно к каждой группе, проведем в них турниры по описанной выше схеме для 9 человек. Тогда останется только провести матчи между противниками из разных групп. Для этого достаточно разбить каждую группу на 4 команды по 2 человека и провести все возможные матчи между командами из разных групп.

8. См. решение задачи М1410, б) в одном из следующих номеров «Кванта».

Физическая олимпиада школьников России

Зональный этап

9 класс

1. Скорость тени не зависит от расстояния x

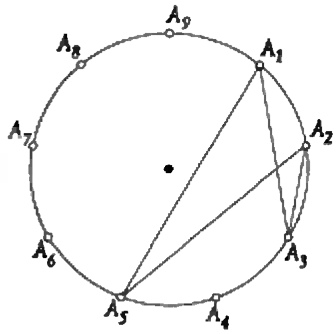


Рисунок 32

и равна $vH/(H-h)$.

2. $\rho \approx 1150$ кг/м^3.

10 класс

1. $h = \dfrac{v_0^2}{2g}\left(\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta^2}\right)^2$,

где $\alpha = \dfrac{m_1}{m_2}$ и $\beta = \dfrac{b}{a}$; шарик m_1 «проваливается» вниз, если $\alpha > \beta^2$, остается на доске, если $\alpha = \beta^2$, отскакивает вверх, если $\alpha < \beta^2$.

2. $\eta = 4/21$.
3. $A = 5/24\, mgl$.
4. $C = C_0/3$.

11 класс

3. $t = T_0(1 + 1/\pi)$.

Заключительный этап

9 класс

1. $a = g/\cos^2\alpha$.

2. $v_1 = \dfrac{2u(n-1)\operatorname{ctg}\alpha}{2-n}$; $v_2 = \dfrac{2u(n-1)}{(2-n)\sin\alpha}$.

3. $t_2 = 32{,}7$ °С.

10 класс

1. $a = \dfrac{g\cos\alpha}{\left(1-(\sin^2\alpha)/2\right)^{3/2}}$.

4. $A_{ш} = Q - 3A$.
5. $U_1 = -0{,}8$ В; $U_2 = 3{,}6$ В.

11 класс

1. $F_{max} = 5{,}5\cdot 10^3$ Н.
2. $k = 2{,}2$.
5. $v = 6{,}3$ см/с.

Напечатано в 1993 году

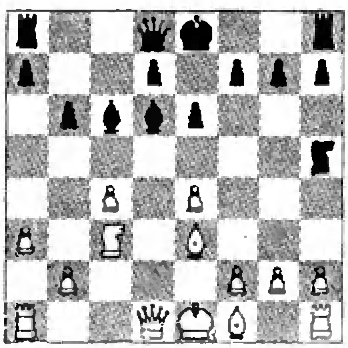
КВАНТ

Адрес редакции	103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250-33-54, 251-55-57
Типография	Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский полиграфический комбинат Министерства печати и информации Российской Федерации 142300 г. Чехов Московской области

ДЮЖИНА ХОДОВ В ПОЕДИНКАХ КОРОЛЕЙ

На международном турнире в Голландии, состоявшемся в начале 1993-го года, 12-й чемпион мира Анатолий Карпов сыграл уникальную партию против известного американского гроссмейстера.

Кристиансен — Карпов
Вейк ан Зее, 1993
Новоиндийская защита
1. d4 Kf6 2. c4 e6 3. Kf3 b6 4. a3 Ca6 5.Фc2 Cb7 6. Kc3 c5 7. e4 cd 8. K:d4 Kc6 9. K:c6 C:c6 10. Cf4 Kh5 11. Ce3 Cd6?? 12. Фd1.



В этой позиции, не сделав своего 12-го хода, знаменитый гроссмейстер остановил часы, поздравив соперника с быстрой победой. Трудно поверить, но он просмотрел простую вилку — ферзь с поля d1 напал одновременно на слона d6 и коня h5.

Да, эта недавняя партия весьма обнадежит всех любителей шахмат: она показала, что и выдающимся игрокам ничто человеческое не чуждо...

Между прочим, это уже второй случай в шахматной биографии Карпова, когда он пополняет коллекцию суперминиатюр (не больше дюжины ходов). Первая из них состоялась ровно четверть века назад, когда Карпов был еще «глубоким» юношей... Но тогда дело сложились для него удачнее, и будущий чемпион мира одолел своего соперника в 10 ходов.

Сангла — Карпов
Рига, 1968
Дебют ферзевых пешек
1. d4 Kf6 2. Kf3 e6 3. Cg5 c5 4. c3 cd 5. cd Фb6 6. Фb3 Ke4 7. Cf4 Kc6 8. e3 Cb4+ 9. Kbd2?? Следовало защититься от шаха другим конем, и тогда сражение не завершилось бы так быстро. **9...g5! 10. C:g5 C:d2+.** Конь f3 перегружен обязанностями: после **11. K:d2** лишился защитника слон g5. Поэтому белые сдались, не дожидаясь ответа **11...Фa5!**

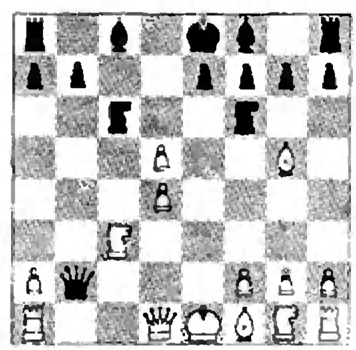
Итак, поединок Кристиансен — Карпов попал в коллекцию шахматных курьезов. Что было делать его главному «виновнику» в такой ситуации? Поскольку турнир проводился по олимпийской системе, т.е. с выбыванием, причем каждый матч гроссмейстеров состоял из двух партий, у экс-чемпиона мира не оставалось другого выхода, как взять реванш у своего обидчика во второй встрече. И он уверенно справился с этой задачей, победил и в решающем дополнительном поединке. Далее от меча Карпова пали гроссмейстеры Нанн, Солов, а в финале — Ильескас. В результате Карпов стал победителем этого крупного турнира, добившись полной реабилитации.

Партия, с которой начинается наша заметка, сыграна одним из шахматных королей. Оно-то и подсказала автору тему — собрать воедино поединки чемпионов мира, которые заняли не более 12-ти ходов. Обнаружилось, что в биографиях одиннадцати чемпионов (из 13-ти) такие партии есть, и, кстати, не всегда в них чемпионы выходили победителями!

Вот, пожалуй, самая знаменитая миниатюра, длившаяся дюжину ходов. В отличие от других экспонатов подобного сорта, где все решил грубый просмотр или тактический трюк, в данной партии был начисто опровергнут один дебютный вариант.

Ботвинник — Шпильман
Москва, 1935
Защита Каро — Канн
1. c4 c6 2. e4 d5 3. ed cd 4. d4 Kf6 5. Kc3 Kc6 6. Cg5 Фb6? Обычное продолжение в атаке Панова 6...e6. Эту новинку — выпад ферзем, придуманный чешским мастером Рейфиржем, — знаменитый австрийский гроссмейстер специально привез в Москву, чтобы поразить Михаила Ботвинника, охотно игравшего данный вариант. Впрочем, он скоро понял, что лучше бы потерял свою новинку по дороге!

7. cd Ф:b2? Правильно 7...K:d4, хотя теория отдает предпочтение белым, например: 8. Kf3 K:f3 9. Ф:f3 Ф:b2 10. Cb5 и т.д.



Рейфирж полагал, что здесь белые обязаны играть 8. Ka4, и тогда 8...Фb4+ 9. Cd2 Ф:d4 10. dc Ke4 11. Ce3 Фb4+ 12. Kpe2 bc! — за пожертвованную фигуру у черных опасная атака (грозит 13...Ф:a4 14. Ф:a4 Kc3+ и 15...K:a4). Но взять в дебюте Ботвинника голыми руками мало кому удавалось! Он не был знаком с анализом Рейфиржа, а сам установил, что взятие на b2 ведет к катастрофе для черных.

8. Лc1! Kb4 9. Ka4 Ф:a2 10. Cc4 Cg4 11. Kf3 C:f3 12. gf. Сделана дюжина ходов, и черные весьма своевременно сдались. Для спасения ферзя они вынуждены отдать фигуру: 12...Фa3 13. Лc3 Kc2, а как мы уже знаем, играть без фигуры у гроссмейстеров не принято...

Евгений Гик

10-49

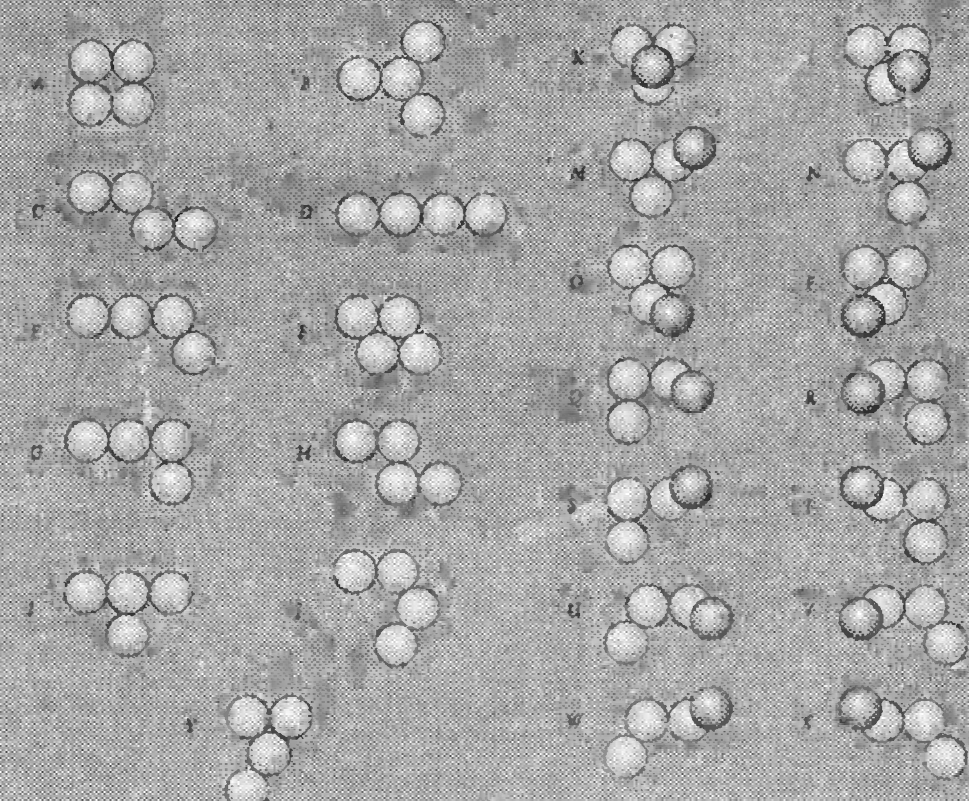
Пирамида без пирамидки

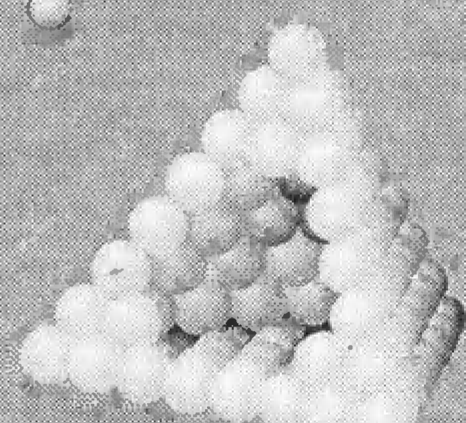
Голландский клуб любителей головоломок изредка объявляет о задачах, которые не смогли решить его члены. Сегодня мы публикуем самое последнее объявление клуба — задачу о пирамиде, за решение которой назначена премия в 1000 гульденов.

Известно, что 20 шариков можно сложить в треугольную пирамиду, вдоль каждого ребра которой располагается 4 шарика. Большая пирамида, показанная на нашем рисунке, имеет по 8 шариков вдоль ребер, и для ее постройки необходимо 120 шариков. Шарик, расположенный внутри пирамиды, окружен 12 соседями, таким образом, на каждом шарике существует 12 точек касания.

Возьмем теперь 4 шарика и будем всевозможными способами соединять их друг с другом в точках касания. Оказывается, что имеется ровно 25 различных способов соединения четырех шариков друг с другом. Все они показаны на рисунке.

А теперь, внимание, задача: Можно ли и, если можно, то как построить из полного набора 25×4 шариков пирамиду с ребром из 8 шариков и пустотой внутри, равной пирамиде из четырех шариков?





Индекс 70465

НОМЕР ПОДГОТОВЛЕН ПРИ ПОДДЕРЖКЕ
РОССИЙСКОГО ФОНДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ